Esercizio 1. *In* $\mathbb{R}^2$ *consideriamo i due punti* $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Dati due punti* $X \neq Y$ *di* $\mathbb{R}^2$ *denotiamo con* XY *la retta passante per* X *e* Y *e con* $\overline{XY}$ *il segmento di estremi* X *e* Y.

1. *(2 punti) Determinare il punto* $B \neq A$ *appartenente alla retta* $x+y=5$ *e tale che* $dist(B, D) = dist(A, D)$.

2. *(2 punti) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche dell'asse del segmento* $\overline{AB}$.

3. *(1 punto) Determinare le equazioni cartesiane e parametrica di* AD.

4. *(2 punti) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza che passa per i punti* A *e* B *e tangente alla retta* AD.

Fare un disegno *che illustri la situazione.*

Esercizio 2. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sia r *la retta passante per* P *e parallela a* v.

1. *(2 punti) Sia* H *la proiezione ortogonale di* A *su* r. *Calcolare* H.
2. *(1 punto) Calcolare la distanza di* A *dalla retta* r.
3. *(1 punto) Sia* A' *il punto ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* A *attraverso la retta* r. *Calcolare* A'.
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici* A, B *e* C.
5. *(2 punti) Siano* s_1 *ed* s_2 *due rette con le seguenti proprietà: 1)* s_1 *passa per* A *ed* s_2 *passa per* B *2)* s_1 *ed* s_2 *sono ortogonali ad* r *3)* s_1 *ed* s_2 *intersecano* r. *Stabilire la posizione reciproca di* s_1 *ed* s_2.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia ed il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
4. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Siano* $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subset \mathbb{R}^4$ *due basi. Siano* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *e* $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *le uniche funzioni lineari tali che*

$$f(v_1) = w_1 + w_2, \quad f(v_2) = w_2 + w_3;$$

$$g(w_1) = v_1 + v_2, \quad g(w_2) = v_2 - v_1, \quad g(w_3) = v_1 + v_2, \quad g(w_4) = v_1 - 2v_2.$$

1. *(2 punti) Scrivere le matrici associate ad* f *e a* g *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$*.*
2. *(1 punto) Stabilire se* $g \circ f$ *è invertibile.*
3. *(2 punti) Calcolare basi di nucleo e immagine di* $g \circ f$*.*
4. *(2 punti) Sapendo che* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*, calcolare la matrice associata a* $g \circ f$ *nella base canonica di* $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice* 4×4

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e la corrispondente forma bilineare b_G *su* $\mathbb{R}^4$ *definita come* $b_G(X,Y) := X^t G Y$ *per ogni* $X, Y \in \mathbb{R}^4$.

1. *(1 punto) Calcolare il quadrato del vettore* $p = (-\frac{1}{15}, \frac{1}{2}, \frac{4}{15}, 1)^t$ *in* $(\mathbb{R}^4, b_G)$.
2. *(2 punti) Dimostrare che* b_G *è non-degenere.*
3. *(2 punti) Trovare una base ortogonale di* $(\mathbb{R}^4, b_G)$.
4. *(2 punti) Calcolare la segnatura di* b_G.