Giovanni Cerulli Irelli

Marco Trevisiol

- Pagina Web:
  2020/21 CIVILE

- e-learning:
  - consegnare esercizi settimanali
  - Test autovalutazioni (in preparazioni)
  - Appunti delle lezioni (anche sulla pagina web)

12 sett. ~~e~~ 1/2

Da consegnare entro Martedì alle 12.

Esami:

Date disponibili sulla pagina web.

Gen
Feb
Giu
Lug
Set

Scritto : 5 esercizi da 7 punti

$\downarrow$ ≥ 18 punti

+

orale

1) Geometria del piano
2) Geometria dello spazio
3) Proiezione ortogonale / algoritmo di Gram-Schmidt / diag. ortogonale
4) Diagonalizzazione
5) Applicazioni lineari

MATLAB :

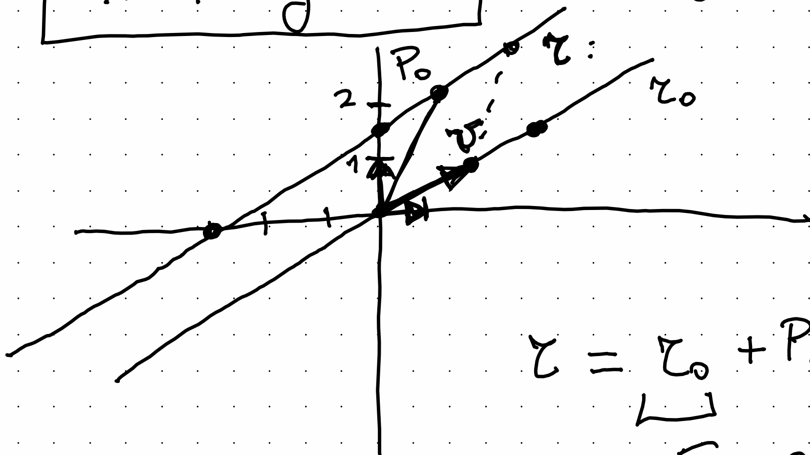
- Scaricare MATLAB.
- MATLAB online
- MATLAB onramp ← Da Fare al più presto.

- **Matematici vs Ingegneri:**

Di che parla il corso?

Soluzioni di un sistema di equazioni lineari.

$$\boxed{-x + 2y = 3} \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



$$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -3$$

$$r = \underbrace{r_0}_{\text{sottospazio vettoriale}} + P_0 \quad \Big] \text{ sottospazio affine}$$

Proiezione ortogonale $\rightarrow$ Approssimazione di dati statistici

Prime definizioni

Insiemi numerici ben noti:

	operazioni
$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$	$+ \quad \cdot$
$\mathbb{Z} = \{\dots, \dots, -1, 0, 1, \dots\}$	$+ \quad \cdot$
$\mathbb{Q} = \{ p/q$ dove $p, q \in \mathbb{Z} \; \dots \}$	$+ \quad \cdot$
$\mathbb{R} = \{ \dots \} \longleftrightarrow$ retta geometrica	$+ \quad \cdot$

Def: Gruppo (abeliano)

è un insieme G dotato di 1 operazione $+$

$$+ : G \times G \longrightarrow G$$

es: $3+2 = 5$

$+(3,2) = 5$

Propr richieste:

- $\exists$ elemento neutro "0_G" : $0_G + a = a + 0_G = a$
- $\exists$ inverso $\forall$ elemento : dato $a \in G$ $\exists b$
  $a + b = b + a = 0_G$
- commutatività $a + b = b + a$
- associatività $a + (b + c) = (a + b) + c$

$\mathbb{Z}, +$	è gruppo abel
$\mathbb{Q}, +$	"
$\mathbb{R}, +$	"
$\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot$	"
$\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot$	"

Def: Campo

è un insieme $\mathbb{K}$ / F dotato di 2 operazioni $+, \cdot$

Propr. richieste:

- $(F, +)$ deve essere gr. ab.
- $(F \setminus \{0_F\}, \cdot)$ deve " "
- propr. distributiva

$$(a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Es: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Numeri complessi

Problema: $x^2 + 1 = 0$ non ammette soluzioni in $\mathbb{R}$

$x^2 - (-1)$

se fosse che -1 è un quadrato

potrei fattorizzare

$(x - \text{qualcosa})(x + \text{qualcosa}) = 0$

$\Rightarrow$ qualcosa e $-$qualcosa

Costruiamo un simbolo "i" t.c.

formalmente $i^2 = -1$

Un polinomio ha un simbolo astratto "x" "t"
e ha definite delle operazioni $+$, $\cdot$

Def: $\mathbb{C} := \{$ polinomi a coeff. reali nella variabile "i" $\}$

c'è la condizione $i^2 = -1$

posso rappresentare tutti i numeri complessi nella forma $\underbrace{a}_{\text{parte reale}} + \underbrace{b}_{\text{parte immaginaria}} i$

Es: $(2+3i)\cdot(1-i) =$

$$2+3i-2i-3i^2 =$$

$$2+3+3i-2i =$$

$$5+i$$

1) Proprietà: $\exists$ l'inverso moltiplicativo

$$z = a+bi \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{z} \overset{?}{=} \underline{a'} + \underline{b'}i$$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}} \cdot \frac{a-b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a}{\underline{a^2+b^2}} - \frac{b}{\underline{a^2+b^2}}i$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo

Dato $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a + bi$

Def: il coniugato di z è $\bar{z} = a - bi$

Oss: $z \cdot \bar{z}$ è un numero reale

è $a^2 + b^2 \geq 0$

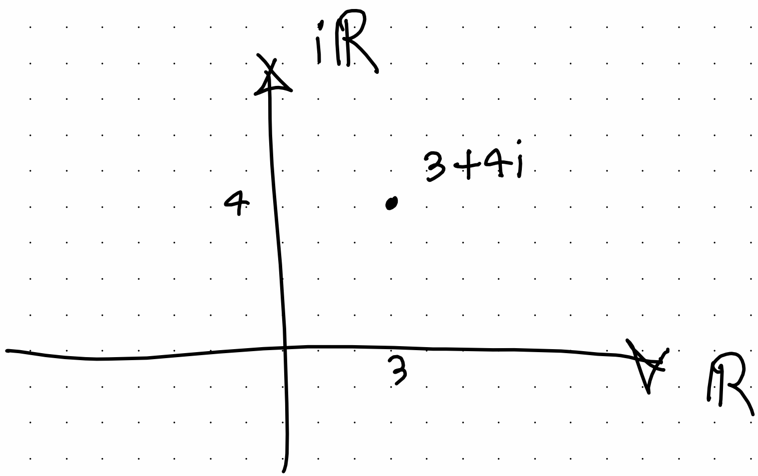
Def: $|z|$ il modulo è $\sqrt{a^2+b^2}$

Oss: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Piano complesso

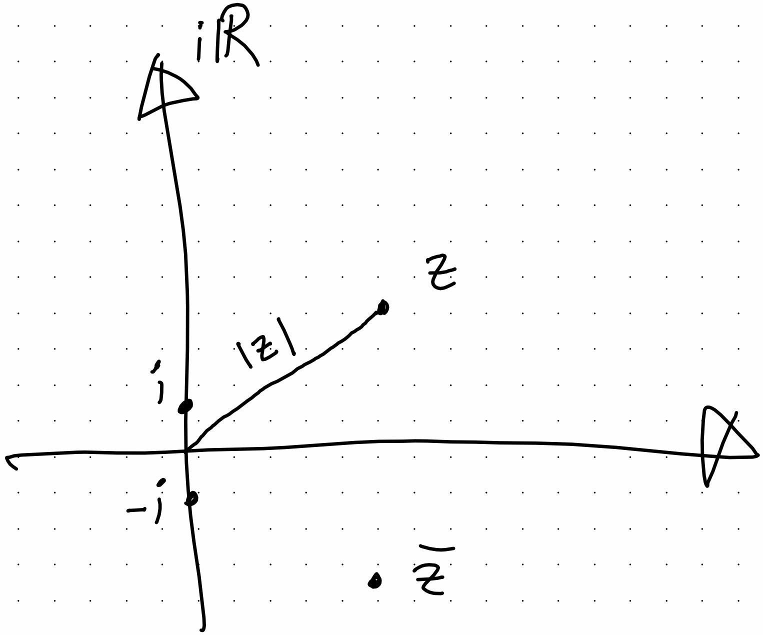
Ogni $z \in \mathbb{C}$ rappresenta 2 numeri reali, quindi posso riportarli su un piano cartesiano

$z = a + bi$ "forma cartesiana"



Chi è $\bar{z}$?

(oss: $z = \bar{z} \iff$ z è reale)



Chi è $|z|$?

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$z = a + bi$ è la forma cartesiana utile per sommare

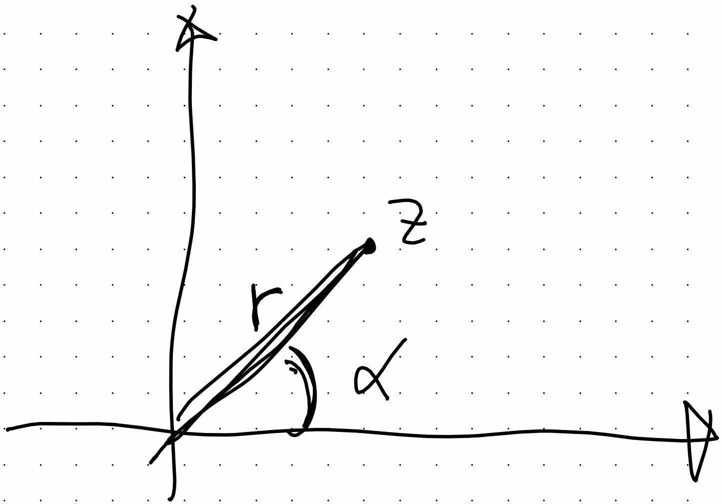
$$z_1 = c_1 + s_1 i$$
$$z_2 = c_2 + s_2 i$$
$$z_1 z_2 = (c_1 c_2 - s_1 s_2) + (s_1 c_2 + s_2 c_1) i$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

$\frac{z}{|z|}$ è un numero complesso con $p.r.^2 + p.i.^2 = 1$

$$= \cos(\alpha) + \sin(\alpha) i \implies z = r(\cos(\alpha) + \sin\alpha \cdot i)$$

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ forma polare



$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\, r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$
$$= (r_1 r_2)(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$$