Definizioni (a memoria)

Enunciati (a memoria + comprensione)

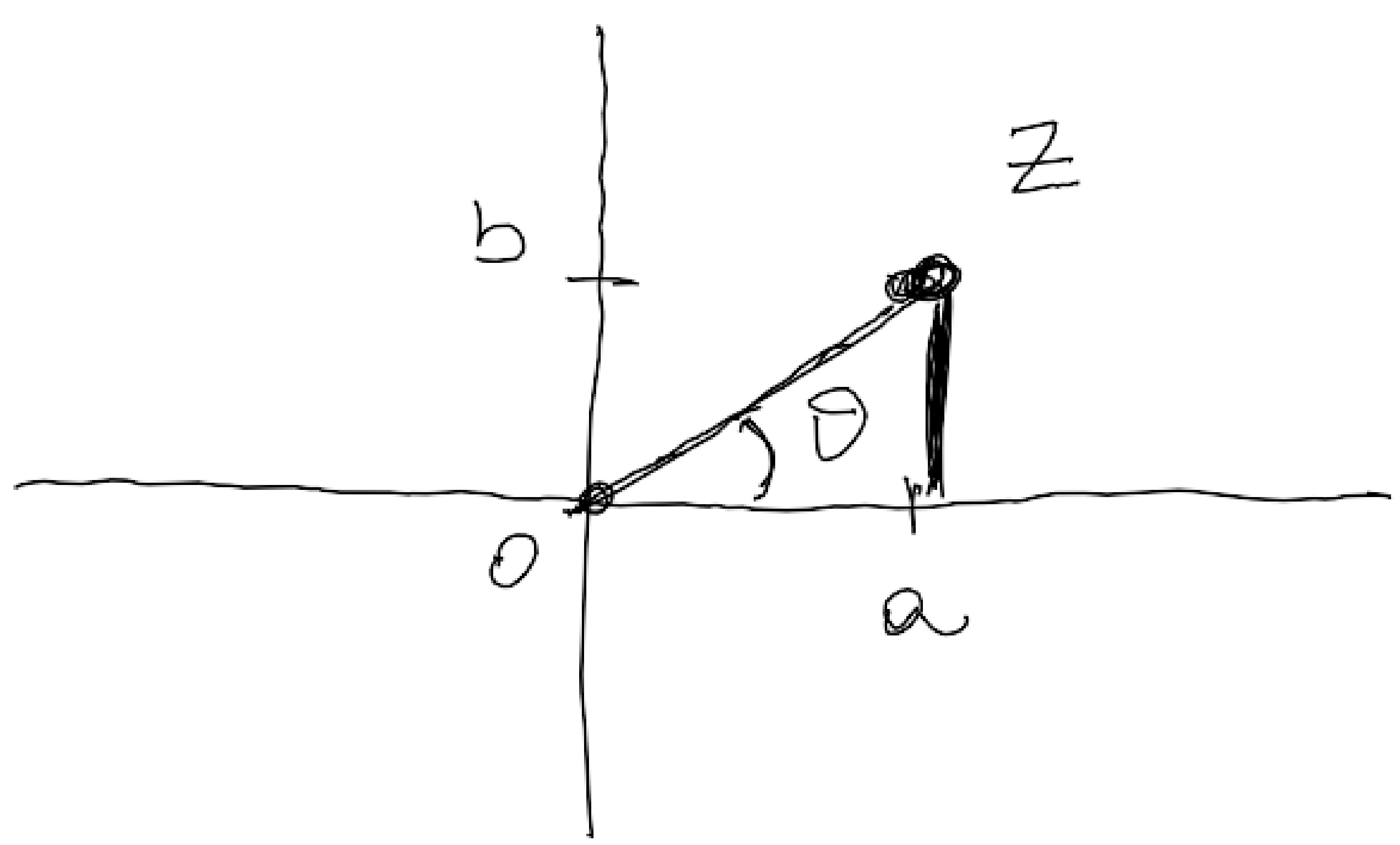
Dimostrazione
degli enunciati (comprensione)

Richiami:

$$\mathbb{C} = \{ a+ib \mid a,b \in \mathbb{R},\ i^2=-1 \}$$

$z = a+ib \qquad a = \mathrm{Re}(z) \qquad b = \mathrm{Im}(z).$

$z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$



$\underbrace{z \neq 0}_{} \Rightarrow \quad \dfrac{a+ib}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

$\Rightarrow \quad \cos\vartheta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\vartheta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

La scrittura $\dfrac{z}{w}$ vuol dire

$$\frac{z}{w} := z\,w^{-1}$$

definizione del simbolo a sinistra

Es: Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma $a+ib$

- $(1-2i)^2 = (1-2i)(1-2i) = 1^2 + (2i)^2 - 2(2i)$

$= 1 - 4 - 4i = -3 - 4i$ $\quad Re((1-2i)^2) = -3$

$Im((1-2i)^2) = -4$

- $\dfrac{3-i}{1+2i} = (3-i)(1+2i)^{-1}$

$=$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow |z|^2 = a^2+b^2$

$\boxed{z\bar{z} = |z|^2} \rightsquigarrow (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$

$\Rightarrow z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|}$ $\quad$ Se $z \neq 0_{\mathbb{C}}$, $z\left(\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\right) =$

$z\bar{z} = |z|^2 \underset{z\neq 0}{\rightsquigarrow} \dfrac{1}{|z|^2}(z\bar{z}) = \dfrac{1}{\cancel{|z|^2}}\cancel{|z|^2} = 1$

$\rightsquigarrow \left(\dfrac{1}{|z|^2}z\right)\bar{z} = 1$

$$z\,\bar z = |z|^2 \implies \frac{1}{|z|^2}\left(z\,\bar z\right) = \frac{1}{\cancel{|z|^2}}\,\cancel{|z|^2} = 1$$

$$\implies \left(\frac{1}{|z|^2}\,z\right)\bar z = 1$$

Proprietà associativa del prodotto

$$\implies \left(z\,\frac{1}{|z|^2}\right)\bar z = 1$$

Proprietà commutative del prodotto

$$\implies \boxed{z\left(\frac{1}{|z|^2}\,\bar z\right) = 1}$$

!

$$\implies z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\,\bar z = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Esercizio: dimostrare che Se $z \neq 0$ allora z^{-1} è unico.

Sol.: Siano u, w due elementi del campo tali che

$$zu = uz = 1$$ e

$$zw = wz = 1$$

$$u = u1 = u(zw) = (uz)w = 1w = w$$

$\boxtimes$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}$$

- $$\frac{3-i}{1+2i} = (3-i)(1+2i)^{-1} = (3-i)\,\frac{1-2i}{1^2+2^2} =$$

$$= (3-i)\,\frac{1}{5}\,(1-2i)$$

$$= \frac{1}{5}\,\Big((3-i)(1-2i)\Big) = \frac{1}{5}\Big(3-6i-i+\underset{-2}{\underline{\underline{2(i^2)}}}\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(3-2-6i-i\Big) =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{7}{5}\,i$$

Proprietà del modulo : Sia $z \in \mathbb{C}$

- $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

dim : $\Rightarrow$) Ipotesi : $|z| = 0$
Tesi : $z = 0$

$|z| = 0$ vuol dire $\sqrt{a^2+b^2} = 0$ che è equivalente a $\boxed{a^2+b^2=0}$. Ma $\mathbb{R}$ è ordinato !

$$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{\text{numeri non-negativi}\}$$
$$= \{\text{quadrati}\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$a = b = 0 \Rightarrow z = 0 + i0 = 0_{\mathbb{C}}$. $\quad 0_{\mathbb{R}} = 0$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\quad$ $z_1^2 + z_2^2 = 0_{\mathbb{C}}$

Se $a, b \in \mathbb{C}$ t.c. $a^2 + b^2 = 0_{\mathbb{C}}$ è vero che $a = b = 0_{\mathbb{C}}$?

$z_1 = z_2 = 0_{\mathbb{C}}$

Questionario:

A Vero

B Falso

C /

D /

E /

$i^2 = -1$

z_1^2 $\quad$ z_2^2

$\Rightarrow 1 + i^2 = 0$

$\Rightarrow 1^2 + i^2 = 0$

$1 \neq 0$ e $i \neq 0$

$\Rightarrow$ L'affermazione è falsa!

I numeri complessi <u>non</u> sono <u>ordinati</u>.

Se esistesse una relazione d'ordine $\geq$

$$i \geq 0 \Rightarrow i(i) \geq 0 \Rightarrow -1 \geq 0$$

Proprietà del modulo:

- $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Disuguaglianza triangolare)

  per ogni $z, w \in \mathbb{C}$.

- $|zw| = |z||w|$

In particolare, $|z\bar{z}| = |z||\bar{z}| = ||z|^2| = |z|^2$ $\quad z\bar{z} = |z|^2$

Se $z \neq 0$, $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|}$

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

un polinomio di grado n, a coefficienti

reali $(a_n \neq 0)$ $(a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$.

Allora esistono n numeri <u>complessi</u>

$z_1, z_2, \dots, z_n$ (non necessariamente

distinti) tali che

$$p(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdot \dots \cdot (x - z_n)$$

__Def__: Una __radice__ λ di un polinomio reale $p(x)$ è un numero λ complesso tale che $p(\lambda) = 0_{\cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}}$

__Es__: $p(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

ha grado 2

Trovare le radici di un polinomio è un problema computazionalmente irrisolvibile.

Radici se $n=2$:

$p(x) = ax^2 + bx + c$ di grado 2 $(a \neq 0)$

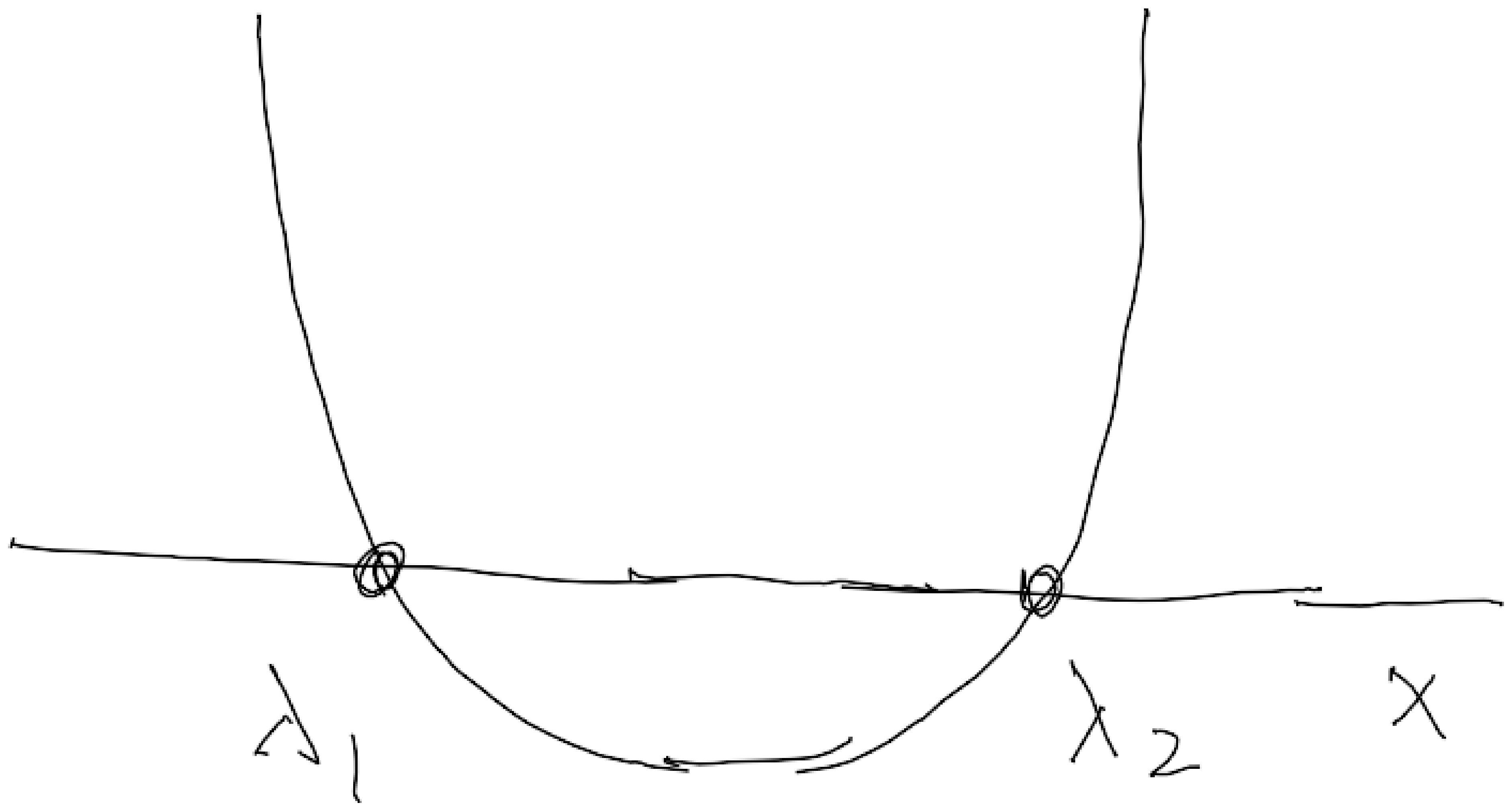
Le radici di $p(x)$ sono λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

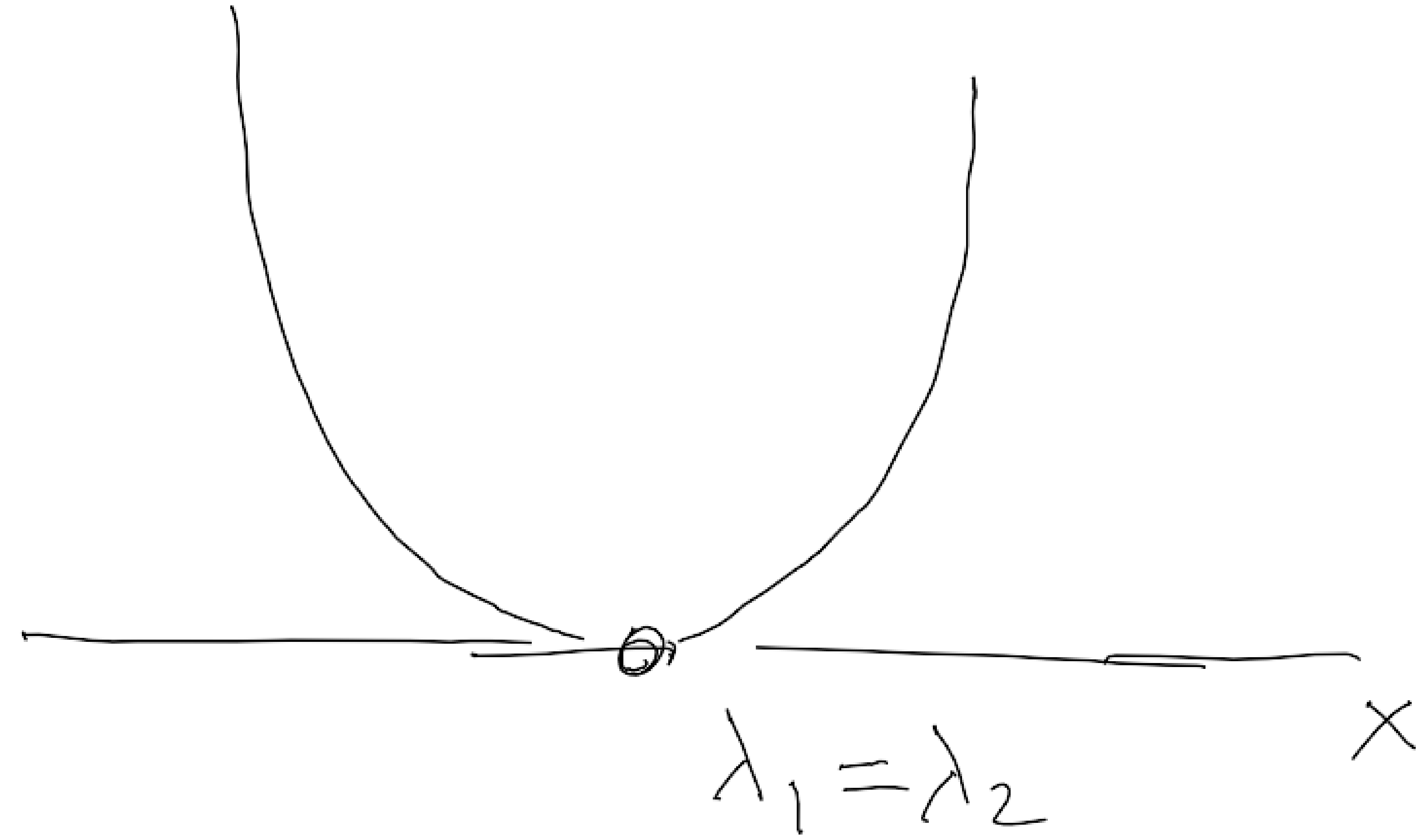
3 casi: 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono reali
$(\Leftrightarrow \ b^2-4ac > 0)$

2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sono complessi non-reali
$(\Leftrightarrow \ b^2-4ac < 0)$

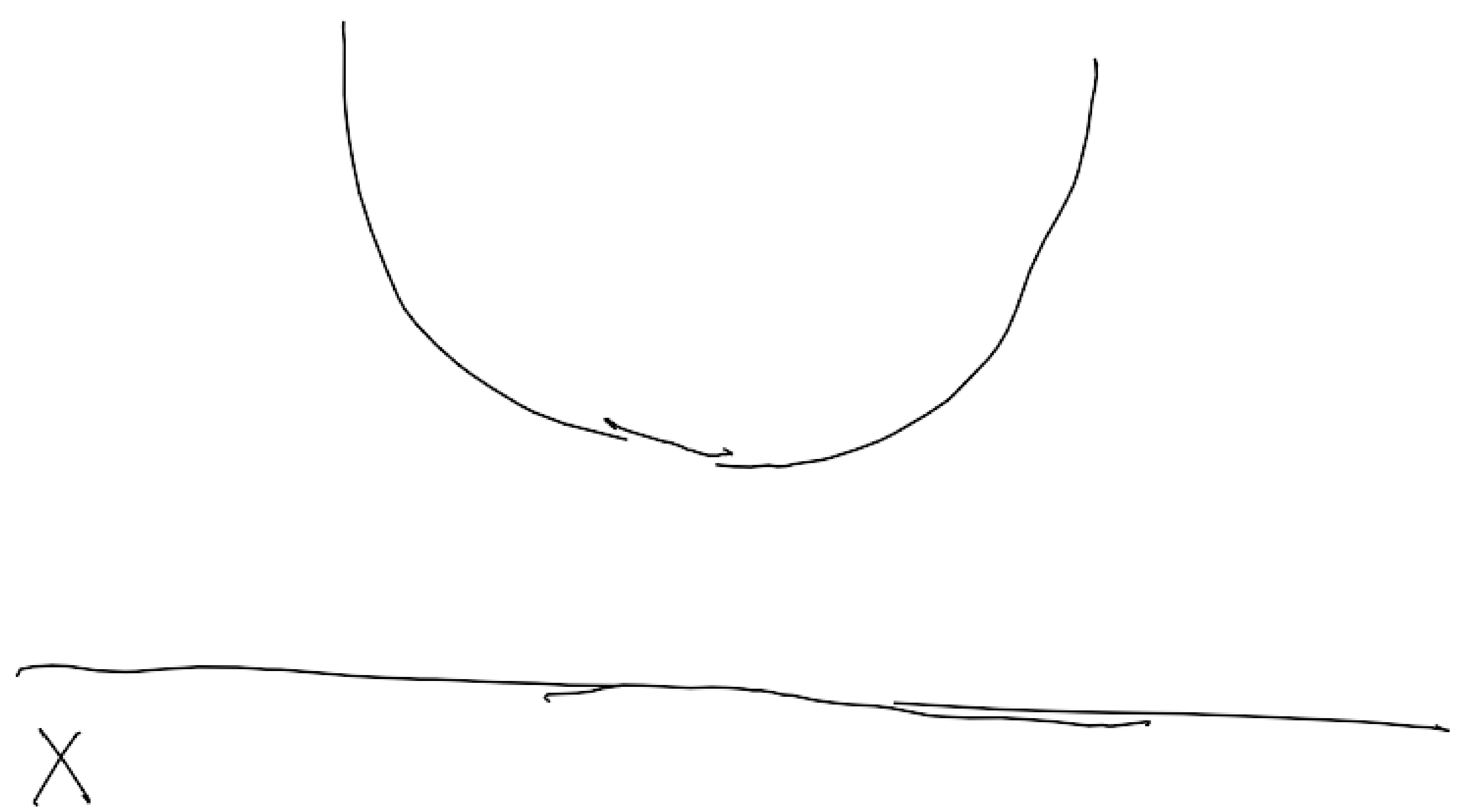
3) $\lambda_1 = \lambda_2$ è un numero reale $(\Leftrightarrow b^2-4ac = 0)$



$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$