Spazi vettoriali

Sia $\mathbb{K}$ un campo.

Def: Uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ è una tripla $(V, +, \cdot)$ tale che V è un insieme, $+ : V \times V \to V$, $\cdot$ è una funzione $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ che gode delle seguenti proprietà:

1) $(V, +)$ è un gruppo commutativo.

$\forall a, b \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$

2) $\underbrace{(a+b)}_{\in \mathbb{K}} \cdot v = \underbrace{a \cdot v}_{\in V} + \underbrace{b \cdot v}_{\in V}$

3) $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$

4) $\underbrace{1}_{\in \mathbb{K}} \cdot v = v$

5) $\forall v, w \in V$, $\forall a \in \mathbb{K}$

$$\underbrace{a}_{\in \mathbb{K}} \cdot \underbrace{(v+w)}_{\in V} = a \cdot v + a \cdot w$$

<u>Es</u> : •) $V = \mathbb{R}$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e anche su $\mathbb{R}$

•) $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

<u>Def</u> : La funzione

$\circ : \mathbb{K} \times V \to V$

si chiama

"<u>prodotto per scalari</u>"

•) $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$= \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \}$

= "coppie ordinate di numeri reali"

$=: \mathbb{R}^2$ = "erre due"

?? è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto a

$$\boxed{(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)}$$

"la somma è definita componente per componente"

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\boxed{a \circ (b,c) := (ab, ac)}$$

$\Updownarrow$

Esercizio.

Notazione : le coppie ordinate di numeri reali le scriviamo in colonna :

$$(1,2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El. neutro $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_V$

Notazione:

L'elemento neutro di $(V,+)$ si denota con il simbolo

$$0_V$$

oss: $0_V \neq 0_{\mathbb{K}}$

$$0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 = 0_{\mathbb{R}}$$

Es: Sia $n \geq 1$.

$\mathbb{R}^n :=$ l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

è uno spazio vettoriale reale (= su $\mathbb{R}$) rispetto a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 \\ \vdots \\ a x_n \end{pmatrix}$$

Es: Se $\mathbb{K}$ è un campo l'insieme

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto alle operazioni definite "componente per componente".

Possiamo pensare a $\mathbb{R}^2$ come l'insieme delle funzioni

$$f : \{1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se $f(1) = a \in \mathbb{R}$

e $f(2) = b \in \mathbb{R}$

allora

$$f \leadsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\{\text{funzioni } f:\{1,2\} \to \mathbb{R}\} \ni f$$

$$\downarrow \psi \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto f:\{1,2\} \to \mathbb{R}$$

$$f(1) = 3$$

$$f(2) = -1$$

Se $f:\{1,2\} \to \mathbb{R}$ ad f associamo la coppia

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}$$

Esercizio:

ψ è biunivoca.

"$\longmapsto$" = "associa"

$a \longmapsto b$ = ad a è associato b

$$\boxed{\psi(f) = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}}$$

- ψ è suriettiva:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \psi(f)$$

dove $f(1) = a$
$f(2) = b$

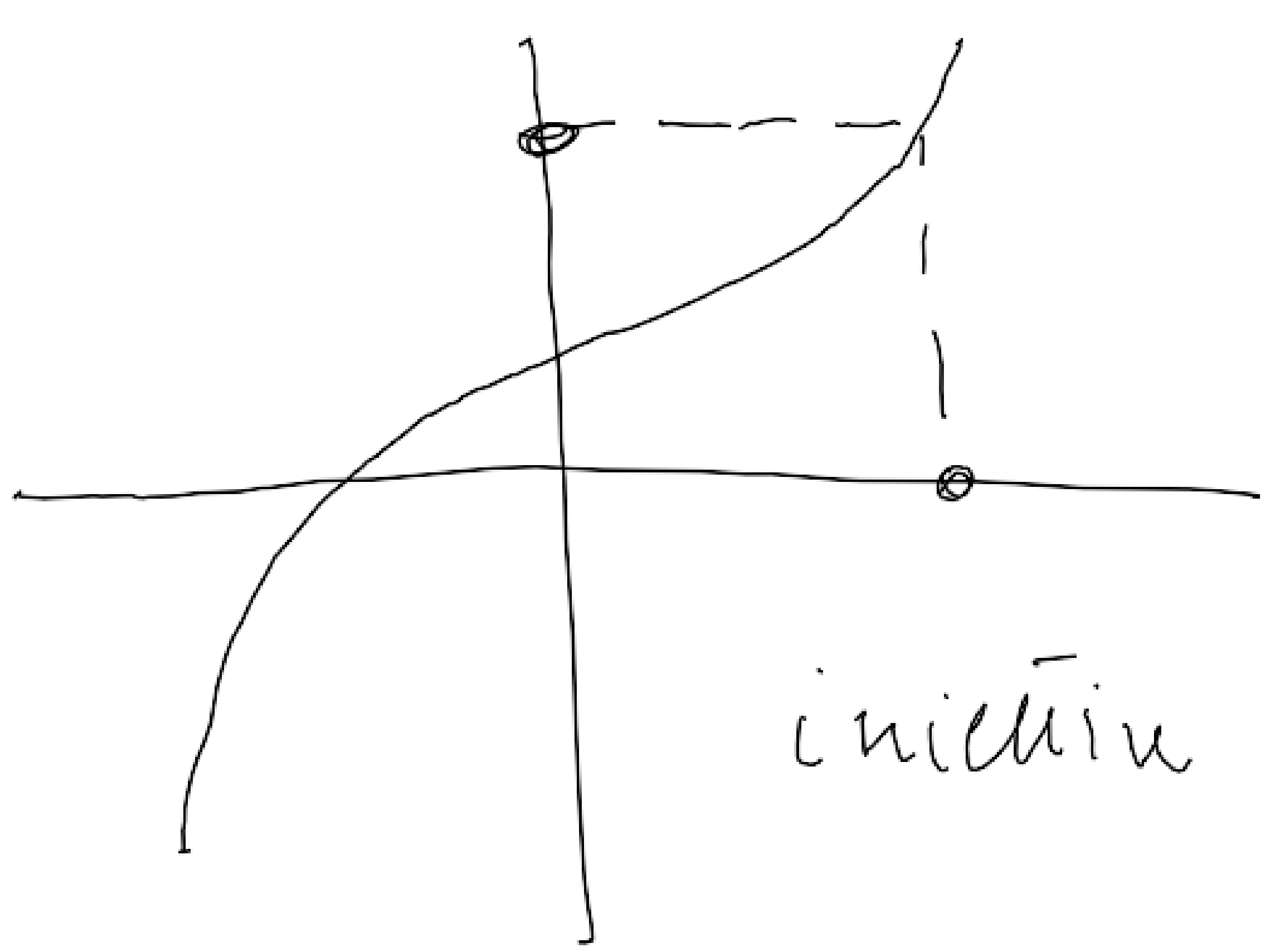
$$\psi(f)=\psi(g)=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

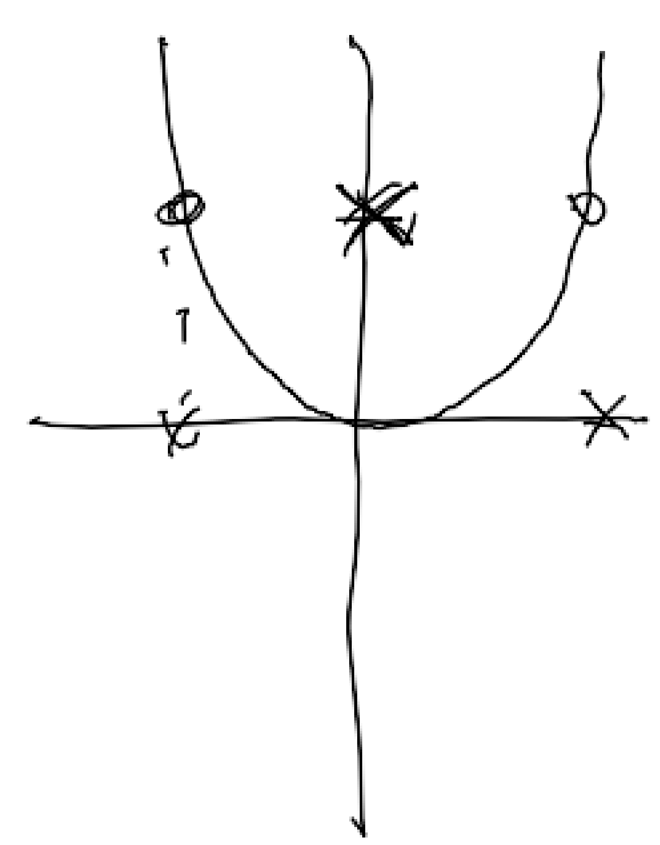
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} f(1)=g(1)=a \\ f(2)=g(2)=b \end{array} \quad \Rightarrow f=g.$$

$\Rightarrow$ ψ è iniettiva. $\square$

<u>Iniettiva</u>:

$$\psi(f)=\psi(g) \Rightarrow f=g$$





<u>Es</u>: Sia X un insieme. Consideriamo l'insieme

$$V=\{\text{funzioni } f: X \to \mathbb{K}\}$$

allora V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

con: dati $\underline{f,g \in V}$, $a\in\mathbb{K}$ definiamo

$$f+g \in V \quad \text{e} \quad af\in V$$

$$(f+g)(x) := \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{K}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{somma}\\ \text{in } \mathbb{K}}}{+} \underbrace{g(x)}_{\in\mathbb{K}}$$

$$(af)(x) := \underbrace{a}_{\in\mathbb{K}} \,\underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{K}}$$

prodotto in $\mathbb{K}$

$\forall x \in X$

__Notazione__: Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, gli elementi di $\mathbb{K}$ si chiamano __scalari__.

__Es__: $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

f

$1 \longmapsto 2$

$2 \longmapsto -1$

$3 \longmapsto 0$

g

$1 \longmapsto 4$

$2 \longmapsto 5$

$3 \longmapsto -2$

$f+g$

$1 \longmapsto 2+4=6$

$2 \longmapsto -1+5=4$

$3 \longmapsto 0+(-2)=-2$

$(-1)f$

$1 \longmapsto (-1)f(1)=-2$

$2 \longmapsto (-1)f(2)=1$

$3 \longmapsto (-1)f(3)=0$

V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$:

•) $(V,+)$ è un gruppo commutativo:

1) $\forall f,g,h \in V$, $\cancel{\forall x \in X}$ [Associativa]

$$(f+g)+h \stackrel{?}{=} f+(g+h)$$

$$[(f+g)+h](x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x)$$

$$= f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x)$$

$(\mathbb{K},+)$ è gruppo

$$= [f+(g+h)](x)$$

Quindi le due funzioni $[(f+g)+h]$ e $[f+(g+h)]$ sono uguali

Def: ($f,g: X \to Y$ due funzioni sono <u>uguali</u> se $f(x)=g(x)$ $\forall x \in X$)

Esercizio: completare la dimostrazione:

$V_X = \{ f : X \to \mathbb{K} \}$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in X$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

per ogni insieme X.

Esempi di tali spazi vettoriali:

$\mathbb{R}^2$ con $X = \{1,2\}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

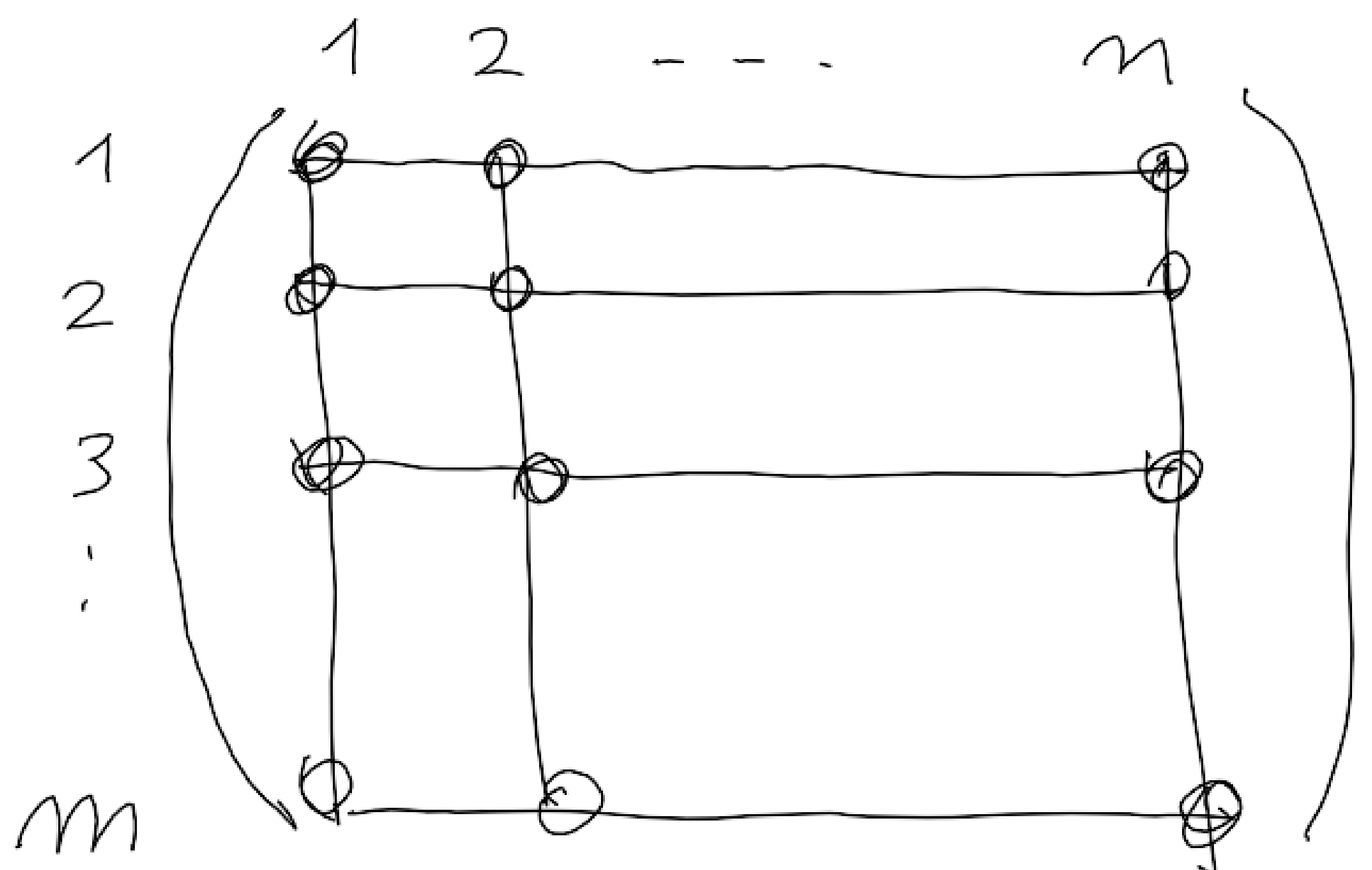
$\mathbb{R}^n$ con $X = \{1,2,\dots,n\}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\mathbb{K}^n$ con $X = \{1,2,\dots,n\} =: [1,n]$ (e $\mathbb{K} = \mathbb{K}$)

Matrici $m \times n$: con $X = [1,m] \times [1,n]$.

Matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$

Una matrice $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è una tabella avente m righe ed n colonne ed entrate in $\mathbb{K}$.

$A =$ 

$\circ \in \mathbb{K}$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×3 a coefficienti in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ è di <u>taglia</u> 3×2

In <u>MATLAB</u> il comando è

o spazio

$A = [1, 2; 3, 4; 5, 6]$

comando per inserire la matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$