# Matrici

Def: è una tabella di numeri

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

specificare:

- il numero di righe : $n$
- il numero di colonne : $m$
- il campo : $\mathbb{K}$ (uno fra $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

L'insieme di queste matrici è denotato: $\mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{Q})$

Es :

matrici colonna $\quad Mat_{n\times 1}(\mathbb{K})$

matrici riga $\quad Mat_{1\times m}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A^j$$

$$A_1 = (1\ 2\ 3) \quad A_2 = (0\ -1\ 5) \qquad A_i$$

$A_i^j = a_{ij}$ sono i coefficienti di $A$

$A_2^3 = 5 = a_{2,3}$ $\quad a_{3,2}$ non esiste in $A$

Le matrici formano uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

Es: $\mathrm{Mat}_{2\times 1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+0\\2+(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

sullo spazio

sul campo

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\right)$$

devo verificare

$\{f : I \to \mathbb{K}\}$ formano uno sp. vett. su $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$ $\qquad$ $\underline{\underline{a(i,j)}}$

$$a : \underline{\{1, \ldots, n\}} \times \underline{\{1, \ldots, m\}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

# Polinomi

I polinomi formano uno sp. vett.

Devo definire la somma e il prodotto con uno scalare

$\uparrow$ ovvia

$$\lambda\, p(x) = \lambda(x)\, p(x)$$

dove $\lambda(x) = \lambda$

# Cos'è un vettore?

È solo un elemento di uno sp. vett.

# Combinazioni lineari

sia $V$ uno sp. vett. su $\mathbb{K}$

se ho $v_1, \dots, v_n \in V$

in generale ottengo

$$\underline{\underline{\lambda_1}}\, \underline{v_1} + \underline{\underline{\lambda_2}}\, \underline{v_2} + \dots + \underline{\underline{\lambda_n}}\, \underline{v_n}$$

Esempio: polinomi

$$1, \quad x, \quad x^2$$

$$2\left(3(1+x) + x + (1+x^2)\right) = 8 \cdot 1 + 8 \cdot x + 2 \cdot x^2$$

$$1 + 2 \cdot x = \underbrace{1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2}$$

$$\underline{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n}$$

$$n = 3 \qquad v_1 = 1 \qquad v_2 = x \qquad v_3 = x^2$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 0$$

$$\underset{v_1}{1+x}\ ,\quad \underset{v_2}{3-2x}\ \Big)\ \text{partenza}$$

$$3v_1 - v_2 = 3+3x-3+2x = 5x$$

$$\frac{1}{5}(3v_1 - v_2) = x$$

$$\frac{3}{5}v_1 - \frac{1}{5}v_2 = x$$

La mamma vuole cucinare

- dei bigné
- dei frollini

Frollini:
250 gr farina
125 gr burro
300 gr zucch
2 uova

Bigné:
180 gr latte
150 gr burro
200 gr farina
6 uova

Vuole fare 1 kg di frollini e usare 10 uova per i Bigné

Matematicamente la mamma vuole computare una comb. lineare

Frollini:
250 gr farina
125 gr burro
300 gr zucch
2 uova

$$\begin{array}{l} \text{farina} \\ \text{burro} \\ \text{zucch} \\ \text{latte} \\ \text{uova} \end{array} \begin{pmatrix} 250 \\ 125 \\ 300 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = V_f$$

Bigné:
180 gr latte
150 gr burro
200 gr farina
6 uova

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 0 \\ 180 \\ 6 \end{pmatrix} = V_b$$

la mamma deve comprare

$$\frac{10}{7} V_f + \frac{10}{6} V_b$$

$$\mathbb{R}^I \qquad I = \{\text{farina}, \dots\}$$

$$\underline{v_f(\text{farina})} = 250$$

$$\mathbb{R}^{\{\text{farina}, \text{burro}, \dots\}} = \mathbb{R}^{\{1,2,3,4,5\}}$$

$$v_f(1) = 250$$

$$\mathbb{R}^5 = \mathrm{Mat}_{5\times 1}(\mathbb{R})$$

# Esempio: matrici

$$V = Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 17 & 20 \\ 23 & 30 \end{pmatrix}$$

$$[5A + 2B]_{1,1} = 5 A^1_1 + 2 B^1_1 =$$
$$= 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 1$$

Con $A, B$ come prima

voglio trovare tutte le matrici $X$ t.c.

$$2(X+A) = B - X + A \quad (X \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R}))$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \quad x_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_{11}+2 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-x_{11} & \cdot \\ & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \end{pmatrix}$$

$2x_{11}+2 = -1-x_{11}$

$\Rightarrow x_{11} = -1$

2 metodo: $2(X+A) = B - X + A$

$$2X + 2A = B + A - X$$

$$2X + X + 2A = B + A$$

$$2X + X = B + A - 2A$$

$$3X = B - A$$

$$\underline{X = \frac{1}{3}(B - A)}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & - & \cdot \\ - & - & \cdot \end{pmatrix}$$

Es: Numeri complessi

$\mathbb{C}$ è anche sp. vett. su $\mathbb{R}$

$$\sqrt{2}\,(5 - i) =$$

$$5\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

so fare $+$

$\lambda \cdot$ dove $\lambda \in \mathbb{R}$

$\underline{a} \cdot 1 + \underline{b} \cdot i$ è una comb. lineare (a coeff. in $\mathbb{R}$)

di $1, i$

$\boxed{1\ ,\ i}$ sono più belli

ma posso usare anche

$$(1+i)\ ,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\quad -2$$

$$3(1+i)-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+5(-2)$$

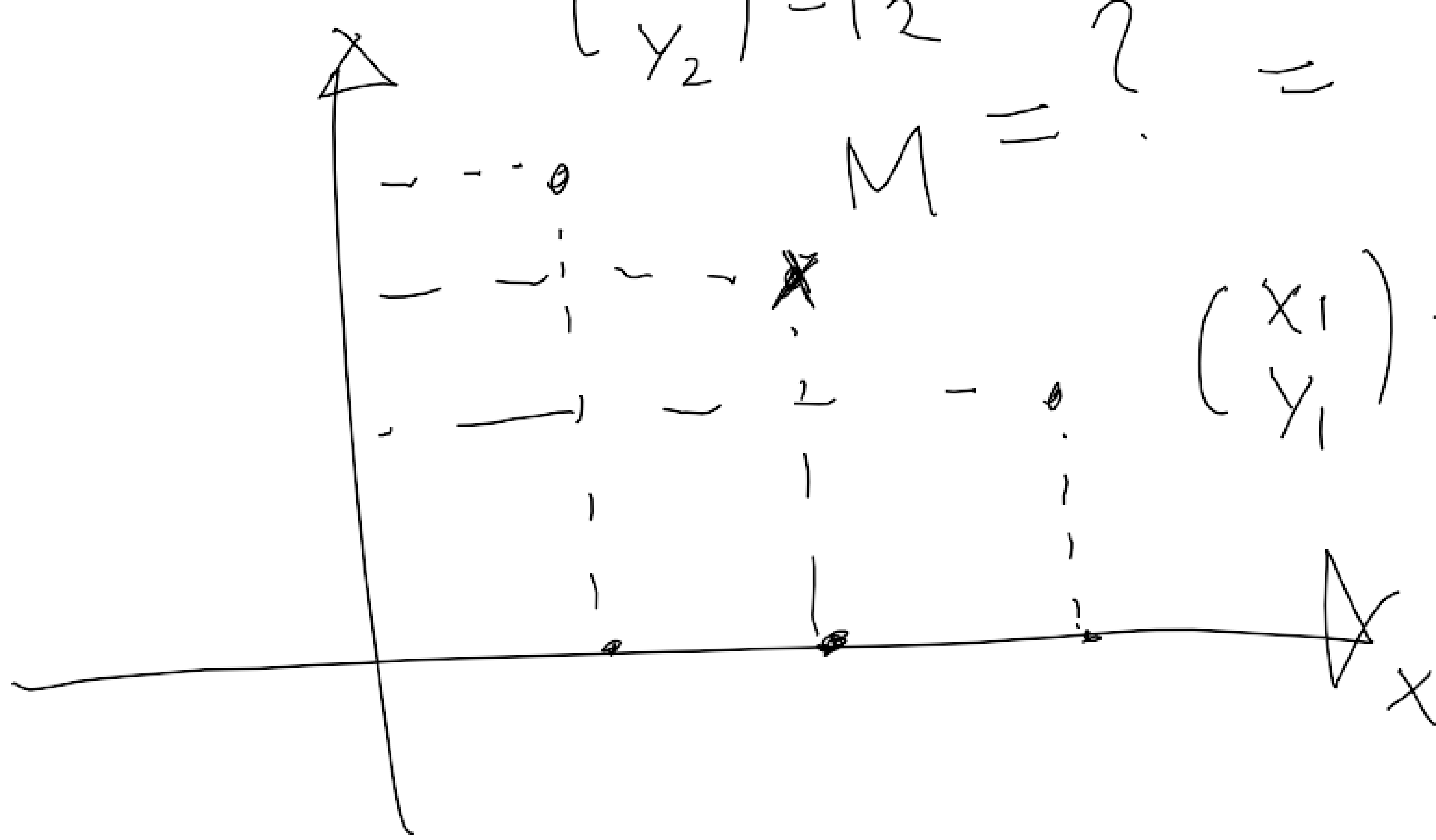
# Combinazioni convesse

i punti del piano cartesiano sono coppie ord. di $\mathbb{R}$

il piano cartesiano è $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{K}^n = Mat_{n \times 1}(\mathbb{K})$ | $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un punto

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = P_2$

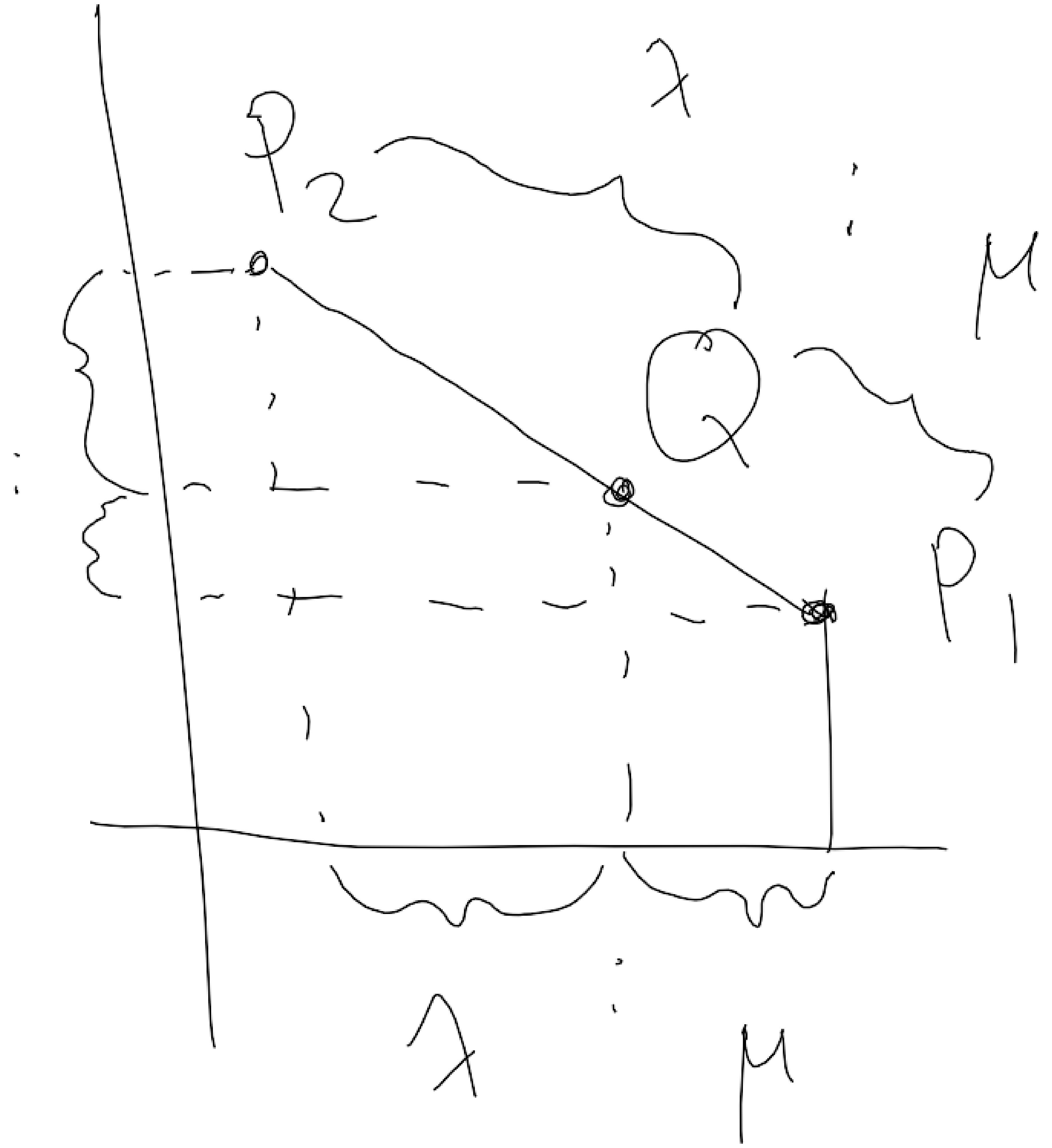



$M \stackrel{?}{=} =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P_1$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{P_1 + P_2}{2}$$




$\frac{\lambda}{\mu}$

$$Q = \underline{\lambda} P_1 + \underline{\mu} P_2$$

Parametrizzazione
del segmento
$\lambda, \mu$

funziona solo se $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu \geq 0$

$P_1 = 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

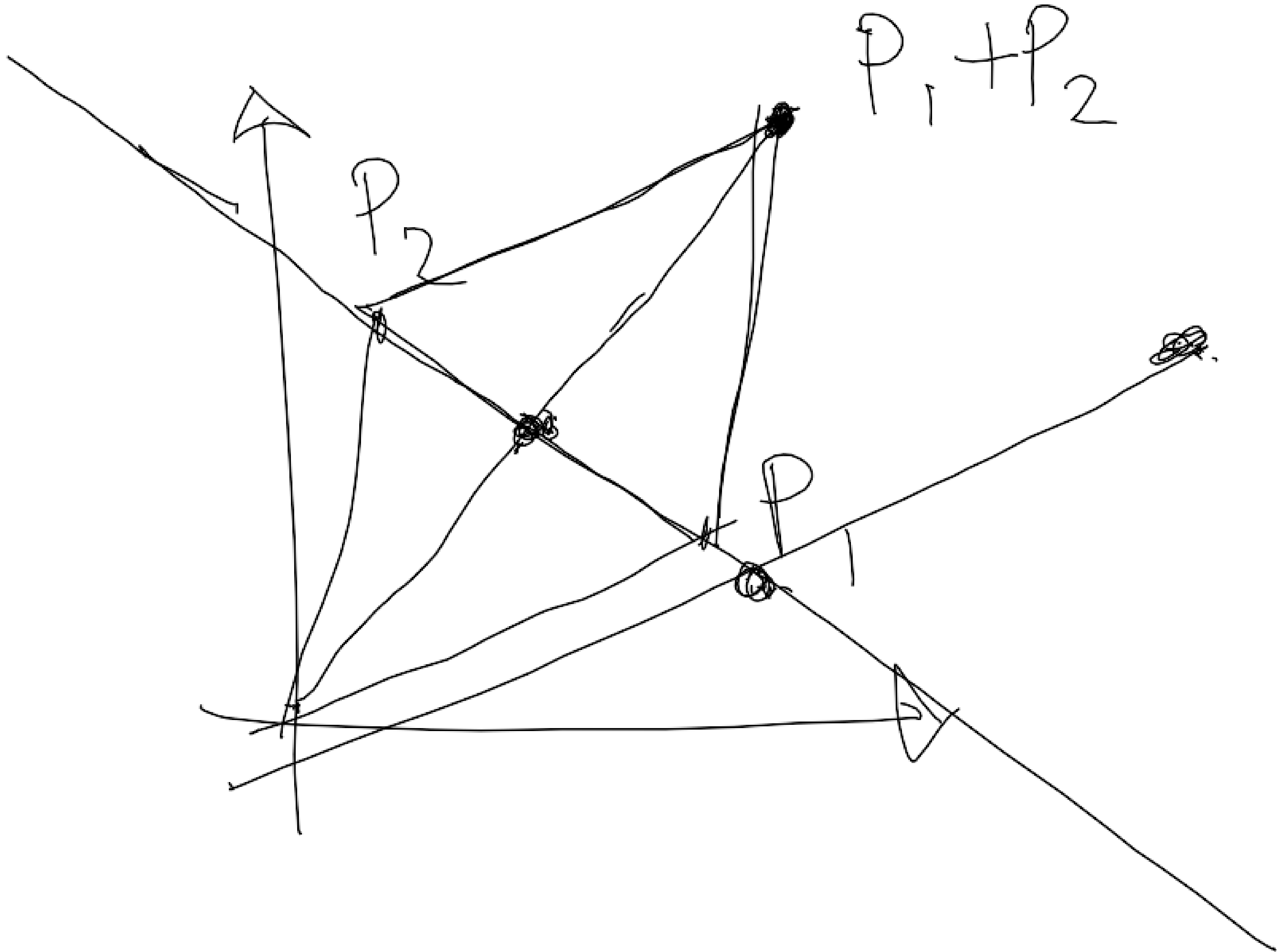
$\lambda P_1 + \mu P_2$ è comb. convessa

quando $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda, \mu \geq 0 \end{cases}$

Se invece avessi voluto param. l'intera retta dovevo usare anche coeff. negativi ($\lambda < 0$ o $\mu < 0$)

purché $\boxed{\lambda + \mu = 1}$

Combinazione affine ha solo la condiz.




$$\frac{\lambda P_1 + \mu P_2}{\lambda + \mu}$$

# Proprietà e notazioni

- dati qualsiasi $v_1, \dots, v_n \in V$

  se faccio 2 comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$

  $$w_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

  $$w_2 = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

  $\alpha w_1 + \beta w_2$ è ancora una comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$

$$\alpha(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + \beta(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) =$$
$$(\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) v_1 + \dots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) v_n$$

- $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) := \{$ comb. lineari di $v_1, \dots, v_n \}$
$\subseteq V$

Es: $\mathbb{C} = \mathrm{Span}(1, i)$ (a coeff. $\mathbb{R}$)

Es: $\mathbb{K}[x]_{\leq n} = \underbrace{\mathrm{Span}(1, x, x^2, \dots, x^n)}_{\text{generatori standard}}$

grado fino a n

Data A

Es: $\mathrm{Span}(A^1, A^2, \dots, A^m) =: \mathrm{Col}(A)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Col}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$