Forma a scala di una matrice

- $A \in Mat_{m \times n}$

  le colonne "dominanti" sono le A^j t.c.

  $A^j \notin \langle A^1, A^2, \dots, A^{j-1} \rangle$

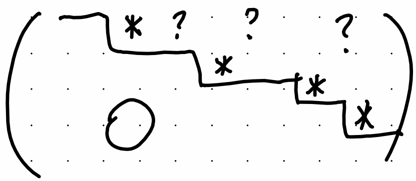
  è a scala ridotta quando le colonne dominanti sono $A^{j_1}, \dots, A^{j_r} = e_1, \dots, e_r$

se S è la forma a scala ridotta di A

allora $\exists$ $C \in Mat_{m \times m}$ invertibile t.c. $S = CA$

Forma a scala di una matrice

ERRATA CORRIGE di ieri



$* \neq 0$

? qualsiasi cosa

Def: per righe: l'i-esimo pivot si trova sull'i-esima riga e sta su una colonna più a destra

per colonne: le colonne dominanti hanno ciascuna un pivot e sono nulle sotto il pivot

- per pivot: il pivot successivo sta sulla riga
appena inferiore
e su una colonna più a destra
del pivot precedente

Attenzione: la forma a scala non è unica!

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \square = \text{pivot}$$

È comunque utile per calcolare rango e base dell'immagine

perché le colonne con un pivot sono le dominanti

$\Rightarrow$ $\operatorname{rk} A$ = numero dei pivot di una forma a scala
base di $\operatorname{Im} A$ è data dalle colonne che hanno un pivot

Es: Vogliamo calcolare $\mathrm{rk} A$ e base di $\mathrm{Im} A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol: applichiamo l'algoritmo di riduzione di Gauss

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto R_2 - R_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 \mapsto R_3 - R_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \mapsto R_3 - 2R_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

già qui la forma è a scala

In generale non mi serve usare le matrici elementari

- $D_{i,\lambda}$ $\leftrightarrow$ dividere la riga i per λ

- $F_{i,j,c}$ $\leftrightarrow$ $(R_j \mapsto R_j - cR_i)$
  se $j < i$

Oss: anche in questo caso se S è una forma a scala di A $\Rightarrow$ $\exists$ C invertibile t.c.

$$S = C \cdot A$$

anche qui C è il prodotto delle matrici elementari usate nella riduzione

Nell'esempio di prima $C = F_{3,2}^{(-2)} F_{3,1}^{(-1)} F_{2,1}^{(-1)}$

$$F_{2,1}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_{2,1}(-1) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

operaz. el.	matrici elem.
• $R_i \mapsto R_i - \lambda R_j$	• $F_{ij}(-\lambda) = \mathbb{1} + (-\lambda) E_{ij}$
• ~	•
• - - -	•

Calcolo dell'inversa di una matrice

- A si dice invertibile quando S_A è invertibile
- ha senso chiedersi che sia invertibile solo se è quadrata
- A invertibile $\iff \exists\, B$ t.c. $AB = BA = \mathbb{1}$

Troviamo l'inversa usando Gauss

- Oss: $\underbrace{\mathrm{rref}(A)}_{=\text{ la forma a scala ridotta di } A} = \mathbb{1}$ se A invertibile

- Oss: sappiamo che $\exists\, C$ invertibile t.c. $\mathbb{1} = C \cdot A$

$A, C \in Mat_{n \times n}$

Oss laterale: $CA = \mathbb{1} \Rightarrow AC = \mathbb{1}$

infatti $CA = \mathbb{1} \Rightarrow$ A iniettiva $\Rightarrow \ker A = 0$

C suriettiva

$\Rightarrow$ (Teo dimensione) $\dim \mathbb{K}^n = \dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A$

$n = 0 + rk\, A$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} A = \dim \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ A suriettiva

$\Rightarrow \exists$ B inversa di A ($\Leftrightarrow AB = BA = \mathbb{1}$)

$\Rightarrow CA = \mathbb{1} \Rightarrow CAB = \mathbb{1}B$

$C\mathbb{1} = B \Rightarrow C = B$

Sia $X = (A \mid \mathbb{1})$ $\quad X \in Mat_{n \times 2n}$

forma a blocchi

$$\mathrm{rref}(X) = \mathrm{rref}(A \mid \mathbb{1}) \overset{\exists B \text{ t.c.}}{=} (\mathbb{1} \mid B)$$

$$(\mathbb{1} \mid B) = C' \cdot X$$

• Oss: $C' = C$ perché ho fatto le stesse riduzioni

$$(\mathbb{1} \mid B) = C \cdot (A \mid \mathbb{1}) = (CA \mid C)$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{1} = CA \quad$ e $\quad B = C$

cioè B è l'inversa di A

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A \mid \mathbb{1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 - R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

fine

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

se non ho sbagliato i conti:

verificare che $A A^{-1} = \mathbb{1}$

Esempio: inversa di $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Assumo che
- $a \neq 0$
- $d - \frac{cb}{a} \neq 0 \iff ad - bc \neq 0$

Applichiamo la riduzione di Gauss a $(A \mid \mathbb{1})$

$$\left(\begin{array}{cccc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \mapsto \frac{1}{a} R_1]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - cR_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & d - \frac{cb}{a} & -c/a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \mapsto \frac{a}{ad-bc} R_2]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \mapsto R_1 - \frac{b}{a} R_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a - \frac{\frac{bc}{a}}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

in effetti sotto l'unica assunzione $ad-bc \neq 0$

si ha che $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$A A^{-1} = \mathbb{1}$$

(per ora sapevamo che A^{-1} esiste appena $\mathrm{rk} A = 2$)

Es: Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$\mathcal{L} : V \to V$$
$$\mathcal{L}(p(x)) = p(x+1) - p(x)$$

- $\mathcal{L}$ è lineare
- Scrivere la matrice associata a $\mathcal{L}$ nella base std di V
- Calcolare base di $\ker \mathcal{L}$ e $\operatorname{Im} \mathcal{L}$
- $F : V \to \mathbb{K}^4$

  $F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$ è lineare e invertibile

Sol: F è invertibile:

$p \in \operatorname{Ker} F$ allora $p(x) = 0$ per $x = -1, 0, 1, 2$

$\Rightarrow$ p ha 4 radici $\Rightarrow$ è multiplo $(x+1)x(x-1)(x-2)$

però ha grado 3 $\Rightarrow$ $p = 0$ cioè $\operatorname{Ker} F = 0$

$\Rightarrow$ F iniettiva $\Rightarrow$ F invert. per questioni dimensionali

Ora esiste $\mathcal{B}$ base di V t.c. $F = F_{\mathcal{B}}$

Troviamo $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

b_i è t.c. $F(b_i) = e_i$ $\qquad b_1 = \lambda(x(x-1)(x-2))$

$b_1(x)$ è t.c. $\begin{pmatrix} b_1(-1) \\ b_1(0) \\ b_1(1) \\ b_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad 1 = b_1(-1) = \lambda(-6)$

$\lambda = -\frac{1}{6}$

$$b_1(x) = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$
$$b_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}$$
$$b_3(x) = \frac{(x+1)x(x-2)}{-2}$$
$$b_4(x) = \frac{(x+1)x(x-1)}{6}$$

$b_2(3) = 4$

$\vdots$

questo procedimento si chiama interpolazione di Lagrange

$b_i(x)$ è il polinomio di Lagrange i-esimo associato ai punti $(-1, 0, 1, 2)$

ora $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

e $F = F_{\mathcal{B}}$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K}^4 \arrow[r, dashed, "S_A"'] & \mathbb{K}^4
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ b_1(3) \end{pmatrix}
$$

$$
\shortparallel
$$

$$
A = \begin{pmatrix} & | & | & | \\ & | & | & | \\ & | & | & | \end{pmatrix}
$$

$$
\underline{F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(b_1))} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(b_1)(-1) \\ \mathcal{L}(b_1)(0) \\ \mathcal{L}(b_1)(1) \\ \mathcal{L}(b_1)(2) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} b_1(0) - b_1(-1) \\ b_1(1) - b_1(0) \\ b_1(2) - b_1(1) \\ b_1(3) - b_1(2) \end{pmatrix}}
$$

$$
\ldots
$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A^3 \quad \ldots \; A^4$$