MATLAB: • completare il corso MATLAB onramp.
• Fare gli esercizi sulla pagine e-learning.
(

QUIZ : V

<u>Richiami</u>: Dati h vettori $v_1, \dots, v_h \in V$, una loro <u>combinazione lineare</u> è un vettore v della forma

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_h v_h$$

per qualche $t_1, t_2, \dots, t_h \in \mathbb{K}$.

Denotiamo

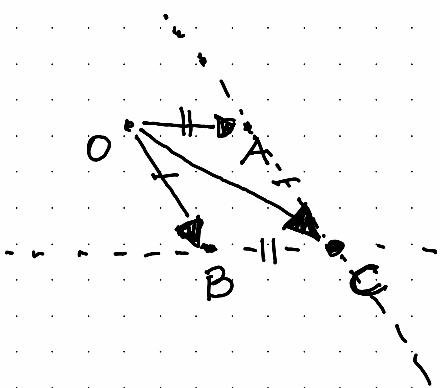
$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_h) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_h) = \{ t_1 v_1 + \dots + t_h v_h \mid t_1, \dots, t_h \in \mathbb{K} \}$$

$\underline{Es}$: $\mathcal{L}(0_V) = \{ t0_V \mid t \in \mathbb{K} \} = \{0_V\}$

$\underline{Terminologia}$: I vettori della forma tv $(t \in \mathbb{K})$ si chiamano $\underline{multipli}$ di v.

$\underline{Es}$: $v \neq 0_V$; $\mathcal{L}(v) = \{ tv \mid t \in \mathbb{K} \}$

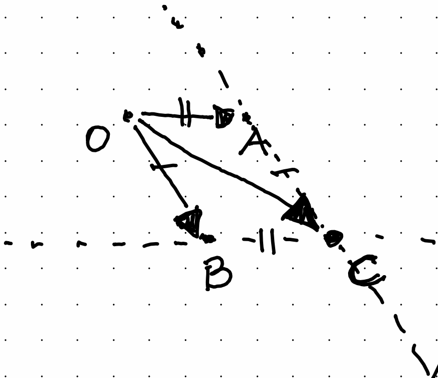
$\underline{Es}$: $V_0^2 = \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{E}^2 \}$.



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ dove C si trova con la regola del parallelogramma: C è t.c. $\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OB}$

$\underline{Esercizio}$: Studiare la dimostrazione del Teorema $(V_0^2, +, \cdot)$ è un $\mathbb{R}$-sp. vettoriale.

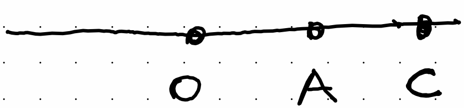
Es: $V_0^2 = \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{E}^2\}$.



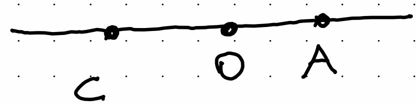
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ dove C si trova con la regola del parallelogramma: C è t.c. $\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OB}$

Esercizio: Studiare la dimostrazione del Teorema $(V_0^2,+,\cdot)$ è un $\mathbb{R}$-sp. vettoriale.

$\lambda \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$



$\lambda > 0$



$\lambda < 0$

$|\overline{OC}| = |\lambda| \, |\overline{OA}|$

Sia $A \neq O$. Chi è $\mathrm{Span}(\overrightarrow{OA}) = ?$

<u>OSS</u>: Se $A = O$ allora $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO} = O_{V_O^2}$ e $\mathrm{Span}(\overrightarrow{OO}) = \{\overrightarrow{OO}\}$.

Sia r la retta per O ed A

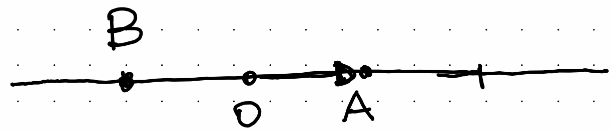
Affermazione: $\mathrm{Span}(\overrightarrow{OA}) = \{\overrightarrow{OB} \mid B \in r\}$

$\subseteq$): Sia $\overrightarrow{OB} \in \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA})$. Allora esiste per definizione $t \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{OB} = t\,\overrightarrow{OA}$.
quindi B giace sulla retta r.

$\supseteq$) Sia $B \in r$. Dimostriamo che esiste $t \in \mathbb{R}$ t.c. $\overrightarrow{OB} = t\,\overrightarrow{OA}$. Poniamo

$$t = \begin{cases} \dfrac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} & \text{se} \\ -\dfrac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} & \text{se} \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} \dfrac{|\overline{OB}|}{|\overline{OA}|} \geq 0 & \text{se} \quad \text{B giace sulla semiretta che contien A} \\[2em] -\dfrac{|\overline{OB}|}{|\overline{OA}|} \leq 0 & \text{se} \quad \text{B giace sulla semiretta che non contiene A.} \end{cases}$$

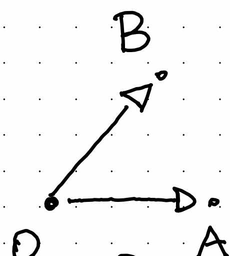
$\mathrm{Span}(\vec{OA})$ "=" 

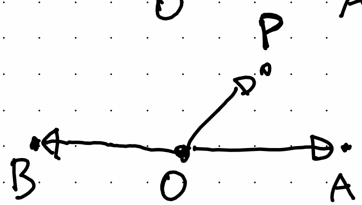
$\vec{OB}$  B

Esercizio (Importante):

Siano $A \neq O \neq B \neq A$ tre punti distinti di $\mathcal{E}^2$.
Supponiamo che questi tre punti non siano allineati (= non giacciano sulla stessa retta).
Allora

$$\mathrm{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \mathcal{V}_O^2$$





OSS: Se O A e B fossero allineati allora

$$\mathrm{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA}) \subsetneq \mathcal{V}_O^2$$

Soluzione: Dobbiamo far vedere che i due insiemi $\mathrm{Span}(\vec{OA}, \vec{OB})$ e $\mathcal{V}_O^2$ sono uguali. D'altronde, già sappiamo che

$$\mathrm{Span}(\vec{OA}, \vec{OB}) \subseteq \mathcal{V}_O^2$$

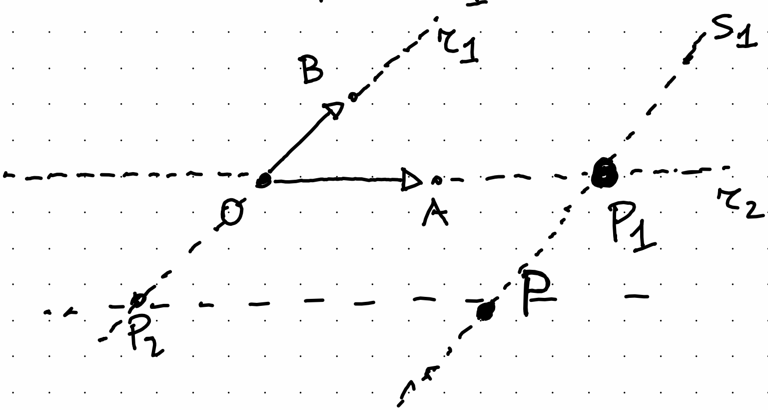
Facciamo vedere l'altra inclusione ($\supseteq$):

$$\mathrm{Span}(\vec{OA}, \vec{OB}) \supseteq \mathcal{V}_O^2.$$

ovvero che

$\forall P \in \mathcal{E}^2 \ \exists \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\vec{OP} = t_1 \vec{OA} + t_2 \vec{OB}$$



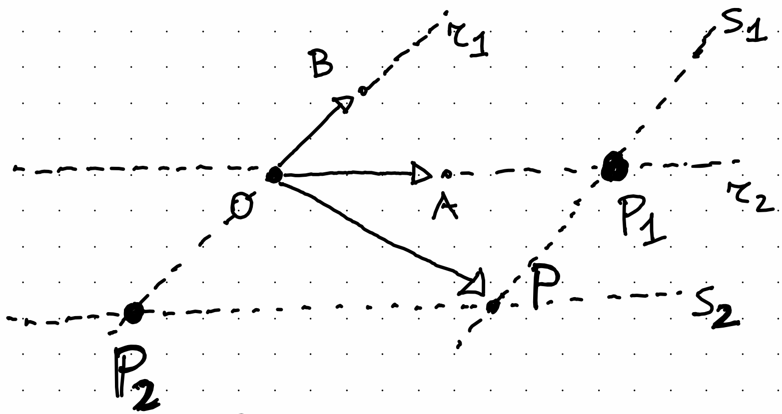
r_1 = retta per O e B

r_2 = retta per O e A

s_1 = retta parallela a r_1 e passante per P

$P_1 = r_2 \cap s_1$

$$\overrightarrow{OP} = t_1 \overrightarrow{OA} + t_2 \overrightarrow{OB}$$



r_1 = retta per O e B

r_2 = retta per O e A

s_1 = retta parallela a r_1 e passante per P

$P_1 := r_2 \cap s_1$

$s_2 :=$ retta parallela a r_2 e passante per P

$P_2 := r_1 \cap s_2$

Per costruzione,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$$

Poiché $P_1 \in r_2$, $\overrightarrow{OP_1}$ è un multiplo di $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{OP_1} = t_1 \overrightarrow{OA}$

Poiché $P_2 \in r_1$, $\overrightarrow{OP_2}$ è un multiplo di $\overrightarrow{OB}$: $\overrightarrow{OP_2} = t_2 \overrightarrow{OB}$

Quindi

$$\overrightarrow{OP} = t_1 \overrightarrow{OA} + t_2 \overrightarrow{OB}.$$

Quindi $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ è un insieme di generatori per lo spazio vettoriale V_O^2.

Le rette per O e A e per O e B si chiamano <u>assi</u> rispetto al sistema di generatori

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$$

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$: "$\mathcal{A}$ è contenuto o uguale a $\mathcal{B}$"

$\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$: "$\mathcal{A}$ contiene $\mathcal{B}$ o è uguale a $\mathcal{B}$"

$\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$: "$\mathcal{A}$ è contenuto ma <u>non</u> uguale a $\mathcal{B}$"

$\mathcal{A} \supsetneq \mathcal{B}$

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Span}(A) \subseteq \mathrm{Span}(B, C)$$

$\Longleftrightarrow \quad A = t_1 B + t_2 C$ per qualche t_1 e t_2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A \overset{?}{\in} \mathrm{Span}(B, C)$?? Si:

$$iB = i \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix} = -A$$

$$\Longrightarrow \quad A = -iB = -iB + 0C \in \mathrm{Span}(B, C).$$

Sottospazi vettoriali

Def: Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ è un sottoinsieme $U \subseteq V$ t.c.

1) $0_V \in U$.
2) $u_1 + u_2 \in U \quad \forall u_1, u_2 \in U$.
3) $\lambda u \in U \quad \forall u \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

OSS:
- $0_V \in U$ è equivalente a richiedere $U \neq \emptyset$
- 2) a parole si dice "U è chiuso rispetto alla somma"
- 3) a parole si dice "U è chiuso rispetto al prodotto per scalari".

OSS: 2) + 3) si possono riformulare dicendo:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 \in U \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

Per verificare che U sia un sottospazio vettoriale:

1) $0_V \in U$ oppure $U \neq \emptyset$.

2) $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u_1, u_2 \in U.$

Es: $V = \mathbb{K}[x] \supset U = \{ p(x) \mid p(0) = 0 \}$

è un sottospazio vettoriale:

Infatti,

1) $0_V = 0 + 0x + 0x^2 + \dots \in U$

2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $p, q \in U$.

$$(\alpha p + \beta q)(0) \underset{\substack{\text{def di } + \\ \text{e } \cdot \text{ in } \mathbb{K}[x].}}{=} \alpha p(0) + \beta q(0) \overset{p,q \in U}{=} \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

Non-esempio: $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 1} = \{ a + bx \mid a, b \in \mathbb{K} \} \supset \{ p \mid p(0) = 1 \} = U$

U non è un sottospazio vettoriale.

$p(x) = a + bx \in U \iff 1 = p(0) = a \iff p(x) = 1 + bx$

Il polinomio nullo non è di questa forma e quindi non sta in U.

$\underline{0} + 0x \; (0) = 0$

$(1 + bx) + (1 + cx) = \underline{2} + (b + c)x$

Es (importante): Siano $v_1, \dots, v_h \in V$. Allora

$$U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_h)$$

è un sottospazio vettoriale.

Infatti,

1) $v_1 = 1v_1 = 1v_1 + 0_V = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_h$

$v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_h$

$\vdots$

$v_i = 0v_1 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_h \quad \forall i = 1, \dots, h$

Quindi

$$v_i \in U \quad \forall i = 1, \dots, h \quad \text{(oss importante!)}$$

e quindi $U \neq \emptyset$.

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall u_1, u_2 \in U$ è vero che $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$?

$u_1 = t_1 v_1 + \dots + t_h v_h$, $u_2 = s_1 v_1 + \dots + s_h v_h$

$\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha t_1 + \beta s_1) v_1 + (\alpha t_2 + \beta s_2) v_2 + \dots + (\alpha t_h + \beta s_h) v_h \in U.$

$\blacksquare$

Notazione : $\mathcal{T} = (v_1, \dots, v_k)$. Scriviamo

$$\mathrm{Span}(\mathcal{T}) := \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$\mathcal{T} \setminus \{v_1\}$ = " $\mathcal{T}$ meno v_1 "

$= (v_2, v_3, \dots, v_k)$ = "differenza tra l'insieme $\mathcal{T}$ e l'insieme $\{v_1\}$".

Lemma di scambio

Sia $\mathcal{T} = (v_1, \dots, v_k) \subset V$. Sia

$0_V \neq u = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in \operatorname{Span}(\mathcal{T})$

un vettore non-nullo in $\operatorname{Span}(\mathcal{T})$.

Se $t_i \neq 0$ allora

$$\operatorname{Span}(\mathcal{T}) = \operatorname{Span}\Big(\mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\}\Big).$$

"Possiamo scambiare il generatore v_i con u senza cambiare $\operatorname{Span}(\mathcal{T})$, a patto che l'i-esimo coefficiente t_i di u sia diverso da zero".

dim: Poichè $t_i \neq 0$, abbiamo

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_i v_i + \dots + t_n v_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t_i} u - \frac{t_1}{t_i} v_1 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i} v_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i} v_{i+1} - \dots - \frac{t_n}{t_i} v_n = v_i$$

Quindi,

v_i è una combinazione lineare di

$$u, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$$

ovvero

$$v_i \in \mathrm{Span}(\mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\}).$$

Ma allora

$$v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathrm{Span}(\mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\})$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \mathrm{Span}(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Span}(\mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\})$$

L'altra inclusione è ovvia. $\blacksquare$

Es: Dimostrare che

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}\right)$$

$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$

Sol.: Sappiamo che

(1) $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

(2) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1e_1 + 2e_2$ Poiché $1 \neq 0$, per il lemma di scambio possiamo scambiare e_1 con v_1:

$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}(v_1, e_2)$

In particolare, $v_2 = t_1 v_1 + t_2 e_2$.

Se t_2 fosse zero, v_2 sarebbe un multiplo di v_1

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} t_1 = 2 \\ t_1 = \frac{3}{2} \end{matrix}$$ assurdo.

Quindi $t_2 \neq 0 \underset{\text{Lemma di scambio}}{\Longrightarrow} \mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.