- **Trevisiol**: Riceve il Martedì (Ieri) alle 14.
  - → per questa settimana Venerdì mattina e pomeriggio.

- **Programma**: → Dip/Ind lineare.

- Come sono andati gli esercizi settimanali?

  A) Non l'ho fatti

  B) Facili

  C) Medi No-Problem

  D) Difficili

  E)

•) Esercizi settimanali :

$$\underset{\text{Assioma n°?}}{\text{Assioma n°?}}$$

•) $0v = 0_V$: $0v \overset{0=1-1}{=} (1-1)v \overset{\text{Assioma n°?}}{=} 1v - 1v \overset{\text{Assioma n°?}}{=} v - v = 0_V$

$-v = (-1)v$

Viceversa: Se $tv = 0_V$ allora $\star$

o $v = 0_V$ oppure se $v \neq 0_V$ allora $t = 0$

(Legge di annullamento):

Se $v \neq 0_V$ e $\boxed{tv = 0_V}$, facciamo vedere $t=0$:

$$v = 1v \underset{t \neq 0}{=} (tt^{-1})v = (t^{-1}t)v = t^{-1}(tv) = t^{-1}0_V = 0_V$$

contraddizione!

$$\boxed{tv = 0_V \iff t = 0 \text{ oppure } v = 0_V}$$

Ipotesi

$\boxed{v+u = w+u}$ Facciamo vedere che $v=w$

Sol.:

$$v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esistenza} \\ \text{di } 0_V}}{=} v+0_V \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esistenza} \\ \text{di } -u}}{=} v+(u-u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Associ.} \\ \text{di } +}}{=} (v+u)-u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{=} (w+u)-u$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{associatività}}}{=} w+(u-u) = w+0_V = w.$$

OSS: Questo è vero in qualunque gruppo.

~~Span~~ u, v, w Domande $\mathrm{Span}(w) \subseteq \mathrm{Span}(u,v)$?
Se lo è è vero che
$\mathrm{Span}(w) = \mathrm{Span}(u,v)$?

1) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Span}(w) \subseteq \mathrm{Span}(u,v)$? Se lo fosse $\exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ t.c.

$$w = t_1 u + t_2 v$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$1 \neq t_1 0 + t_2 0$

$\mathrm{Span}(w) \not\subseteq \mathrm{Span}(u,v)$.

2) $u = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Span}(w) \subset \mathrm{Span}(u,v)$? Sì perché

$$w = u + v$$

Quindi $\forall t \in \mathbb{C}$

$$tw = t(u+v) = tu + tv \in \mathrm{Span}(u,v)$$

$\Rightarrow \mathrm{Span}(w) \subseteq \mathrm{Span}(u,v)$.

Sono uguali? Se lo fossero u e v sarebbero multipli di w: ma u non è un multiplo di w.

$$\underset{u}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = t \underset{w}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow t = 0$$

$\mathrm{Span}(w) \subsetneq \mathrm{Span}(u,v)$.

<u>OSS</u>: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è un multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se $\exists \; t$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora

dalla prima si avrebbe

$$0 = t$$

e dalla seconda

$$1 = t0$$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è un multiplo di $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$?

No, perché se esistesse $t \in \mathbb{K}$ t.c.

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 1 &= t \\ 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{impossibile.}$$

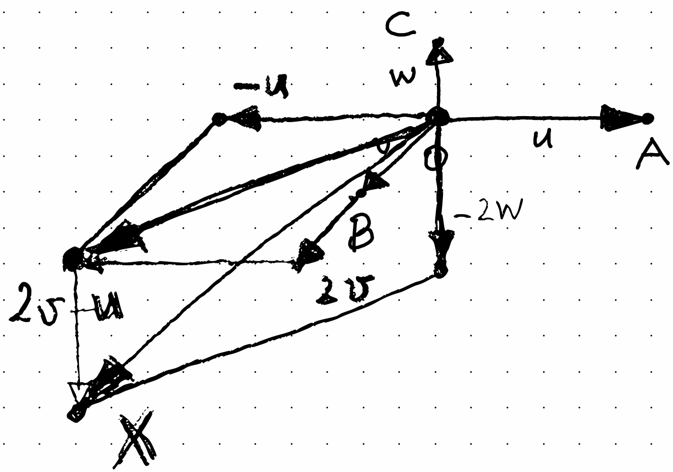
Quali sono i multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$$

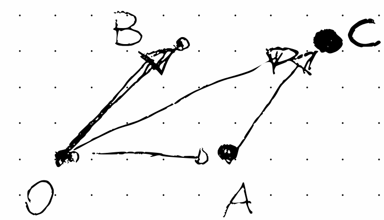
Esercizio: $u = \overrightarrow{OA}$, $v = \overrightarrow{OB}$, $w = \overrightarrow{OC}$

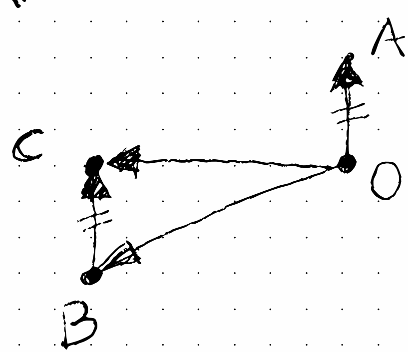
Determinare

$$X = \underbrace{2v - u} - 2w$$



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$





$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Es 3: 0_V = elemento neutro nel gruppo

$$(V, +)$$

$$0v = 0_V \quad : \quad 0v \overset{\text{NO}}{\underset{\text{si}}{=}} 0v + 0v$$

$$0v = (0+0)v = 0v + 0v$$

$$\Rightarrow \quad 0v + \overbrace{w}^{-0v} = (0v + 0v) + w$$

$$\Rightarrow \quad 0_V = 0v \qquad \text{bello!}$$

Richiami:

Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme non-vuoto U di V t.c.

$$\alpha u_1 + \beta u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u_1, u_2 \in U.$$

<u>Es</u>: $U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ è un sottospazio vettoriale.

<u>Def</u>: I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ tali che $U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ si chiamano <u>generatori</u> di U.

<u>Es</u>: $\mathbb{K}^n = \mathrm{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ dove $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$i = 1, \dots, n$, I vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$ si chiamano i <u>generatori standard</u> di $\mathbb{K}^n$.

Es: $\mathbb{K}[x]_{\leq n} = \mathrm{Span}(1, x, x^2, \dots, x^n)$

$$\mathbb{K}[x]_{\leq n} = \underbrace{a_0 1} + \underbrace{a_1 x} + \underbrace{a_2 x^2} + \dots + \underbrace{a_n x^n}$$

$1, x, x^2, \dots, x^n$ si chiamano i <u>generatori standard</u> di $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$.

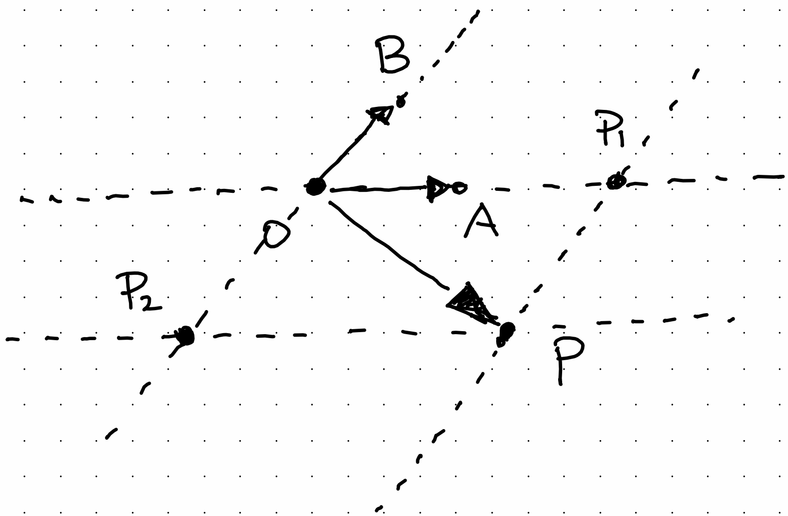
Es: $\mathbb{K}[x] = \cancel{\mathrm{Span}}(1, x, x^2, x^3, \dots)$

<u>Def</u>: Uno spazio vettoriale V si dice <u>finitamente generato</u> se esiste un numero finito di vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ tali che

$$V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Es: Siano $O, A, B \in \mathcal{E}^2$ tre punti distinti del piano e non-allineati. Allora abbiamo visto che

$$\mathcal{V}_O^2 = \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \qquad \mathcal{V}_O^2 = \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{E}^2\}$$



$\overrightarrow{OP_2} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{OB}$

$\notin \mathbb{Q}\,\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = t_1\,\overrightarrow{OA} + t_2\,\overrightarrow{OB}.$$

per opportuni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ sono generatori di $\mathcal{V}_O^2$.

Es:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \right\}$$

È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

1) $0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$. Infatti $0 + 20 = 0$.

2) Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} U$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) = 0$$

Abbiamo

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \underbrace{(x_1 + 2y_1)}_{=0} + \beta \underbrace{(x_2 + 2y_2)}_{=0} \overset{u_1, u_2 \in U}{=}$$

$$= \alpha 0 + \beta 0 = 0 .$$

Es: .) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$?

1) $0 \in \mathbb{N}_0$.

2) Dati $h, k \in \mathbb{N}_0$ $h + k \in \mathbb{N}_0$ ✓

3) $(-1)\,2 = -2 \notin \mathbb{N}_0$ quindi $\mathbb{N}_0$ non è un sottospazio vettoriale.

.) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale?

No, perché non è chiuso per il prodotto per scalare, ad esempio

$$\sqrt{2} \cdot \underbrace{1}_{\in \mathbb{Z}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

Esercizio: $\mathbb{R}$ è finitamente generato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} \overset{!}{=} \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1) \neq \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(1)$$

Notazione: $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_K)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x = x \cdot 1$

Esercizio: $\mathbb{C} = \{ a+ib \mid a,b \in \mathbb{R},\ i^2=-1 \}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ è finitamente generato come $\mathbb{R}$-sp. vettoriale:

$$\mathbb{C} = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(1, i) \qquad U = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\in V})$$

$\cdot)\quad \mathbb{C} = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}(1)$

In generale $\quad \mathbb{K} = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(1)$.

ES: $U = \{ x^2 \mid x \in \mathbb{R} \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : y = x^2 \} \subset \mathbb{R}$

U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$.

1) $0 = 0^2 \in U$. ✓

2) $x_1^2 + \cancel{y} x_2^2 \geq 0$ e quindi $x_1^2 + x_2^2 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^2} \in U$

U è chiuso per la somma

3) $0 \neq x^2 \in U$ ma $(-1)x^2 = -x^2 < 0 \Rightarrow (-1)x^2 \notin U$

U non è chiuso per ~~la~~ il prodotto per scalari.

$U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ U ha infiniti elementi

$v_1, 2v_1, 3v_1, 4v_1, \dots$

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato.

Qual'è il numero minimo h tale che

$$V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_h)\,?$$

<u>Es</u>: $\mathbb{R}^{2} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

Se lo fosse allora

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = t_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

<u>NO</u> <u>NO</u>.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) \iff x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) \iff x_1 = 0$$

Es: $U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^2$

$$U = \left\{ t_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t_1 + 2t_2 \\ t_1 + 2t_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (t_1 + 2t_2) \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} \qquad \mathrm{Span}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$= \left\{ t \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$$

OSS: $\underline{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \in \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$

<u>Problema</u>: Quand'è che

$$\boxed{U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})\ ?}$$

Se $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$

allora $v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$.

Viceversa, se $v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$ allora

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$$

Infatti: Se $v_k = t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1}$ allora

$$s_1 v_1 + \dots + s_k v_k = s_1 v_1 + \dots + s_{k-1} v_{k-1} + s_k (t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1}) =$$

$$= (s_1 + s_k t_1) v_1 + (s_2 + s_k t_2) v_2 + \dots + (s_{k-1} + s_k t_{k-1}) v_{k-1} \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$$

OSS FONDAMENTALE

Dati $v_1, \dots, v_K \in V$. Allora

$$v_K \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{K-1})$$

$$\Updownarrow$$

$\exists \; t_1, \dots, t_K \in \mathbb{K}$, $t_K \neq 0$ t.c.

$$\boxed{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_K v_K = 0_V}$$

Infatti: $\Downarrow$) $v_K = t_1 v_1 + \dots + t_{K-1} v_{K-1}$

$\Rightarrow t_1 v_1 + \dots + t_{K-1} v_{K-1} - v_K = 0_V$

$\Uparrow$) Se $t_1 v_1 + \dots + t_K v_K = 0_V$ con $t_K \neq 0$ allora

$$v_K = -\frac{t_1}{t_K} v_1 - \frac{t_2}{t_K} v_2 - \dots - \frac{t_{K-1}}{t_K} v_{K-1} \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{K-1})$$

Dipendenza lineare

Def: Diciamo che k vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ di un spazio vettoriale V sono LINEARMENTE DIPENDENTI se esistono k numeri $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ <u>non tutti nulli</u> tali che

$$\boxed{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k = 0_V}$$

"<u>Relazione di dipendenza lineare</u>"

Diciamo anche $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente dipendente.

Es: •) $\{0_V\}$ è linearmente dipendente

$$1\, 0_V = 0_V$$ è una relazione di dipendenza lineare.

•) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

sono linearmente dipendenti.

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

è una relazione di dipendenza lineare.

Es: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

sono linearmente dipendenti.

$$2v_1 - v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

è una relazione di dipendenza lineare.

Esercizio: Due vettori $v_1, v_2 \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono multipli uno dell'altro.

Sol.: Se v_1 e v_2 sono lin. DIP. allora esiste una relazione di dipendenza lineare

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 = 0_V$$

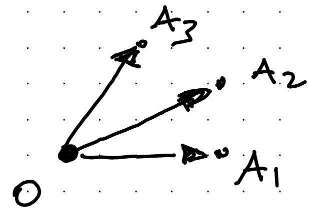
con $t_1 \neq 0$ oppure $t_2 \neq 0$.

Se $t_1 \neq 0$ allora $\boxed{v_1 = -\frac{t_2}{t_1} v_2}$

Se $t_1 = 0$ allora $t_2 v_2 = 0_V$ e quindi dato che $t_2 \neq 0$ $v_2 = 0_V$. $\Rightarrow v_2 = 0 v_1$.

Se $t_2 = 0$ e $t_1 \neq 0$ allora $v_1 = 0_V$ e quindi $v_2 = 0_V$.

Es:



$v_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $v_2 = \overrightarrow{OA_2}$, $v_3 = \overrightarrow{OA_3}$

sono linearmente dipendenti.

Sol.: Dato che O, A_1, A_2 non sono allineati

$$\mathcal{V}_O^2 = \mathrm{Span}\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right)$$

Quindi esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\overrightarrow{OA_3} = t_1 \overrightarrow{OA_1} + t_2 \overrightarrow{OA_2}.$$

$$\Rightarrow \quad t_1 \overrightarrow{OA_1} + t_2 \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OO}$$

è una relazione di dipendenza lineare.

Prop.: L'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale.

dim: Siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali.

1) $0_V \in U$ e $0_V \in W \Rightarrow 0_V \in U \cap W$

2) $\forall\, v_1, v_2 \in U \cap W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in U$ (perché $v_1, v_2 \in U$) e

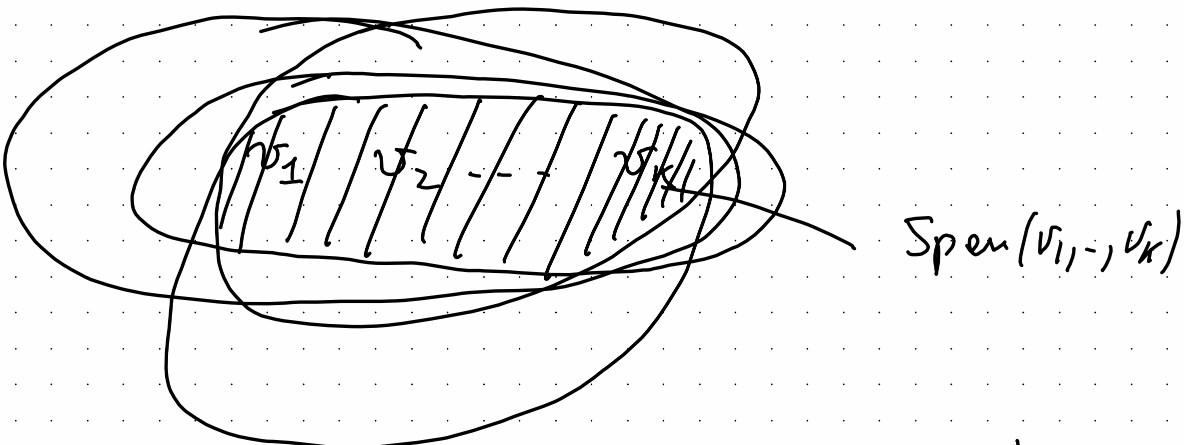
$\alpha v_1 + \beta v_2 \in W$ (perché $v_1, v_2 \in W$)

$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in U \cap W$. $\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Dati $v_1, \dots, v_k \in V$, il sottospazio vettoriale

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene $v_1, \dots, v_k$.



$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \bigcap \{ U \text{ s.sp. vett. di } V \mid v_1, \dots, v_k \in U \}$$

dim:

$v_1, .., v_k \in \mathrm{Span}(v_1, .., v_k)$.

Sia U un sottosp. vett. che contiene $v_1, .., v_k$.
allora U contiene anche TUTTE le combinazioni lineari

$$t_1 v_1 + ... + t_k v_k .$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Span}(v_1, .., v_k) \subseteq U .$$

$\blacksquare$