Ricevimento

A) Venerdì 9 ore 18 - 19

B) Sabato 10 ore 10 - 11

Problema

con quali vettori è meglio fare le comb. lin.?

V sp. $\quad 0_V \in V$

$$\{v_1, \dots, v_k, 0_V\}$$

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k}_{A} + \lambda_{k+1} \cdot 0_V = A + 0 = A$$

V sp. vett. su $\mathbb{K}$

$\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ è una comb. lin. generica
stiamo sottintendendo
scelte per λ_i

si può vedere come funzione

$\lambda : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \mathbb{K}$

$\lambda \in \mathbb{K}^k$ quindi: la scelta dei λ_i è un vettore di $\mathbb{K}^k$

Quindi: fare una comb. lin. degli $\boxed{v_1, \dots, v_n}$

è come dare una mappa

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{K})$$

Oss: $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

spazio delle comb. lin. spazio generato

Indipendenza lineare

Def: $(v_1, \dots, v_n)$ sono vettori lin. dip. se esiste una comb. lin. non banale che dà 0_V

$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n$: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$
non tutti nulli

Es: (v, v) $\qquad 1 \cdot v - 1 \cdot v = 0_V$
è relaz. di dip.

Eserc.: negare la condiz. di dip. lin.

Dati $v_1, \dots, v_n$

$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \quad : \quad \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$

non tutti nulli

la negazione

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Def: $v_1, \dots, v_n \in V$ sono <u>linearmente indipendenti</u>

se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$

Es: sia $v \in V$ non nullo

allora (v) è lin. indip.

$$\lambda_1 v = 0_V \implies \lambda_1 = 0$$

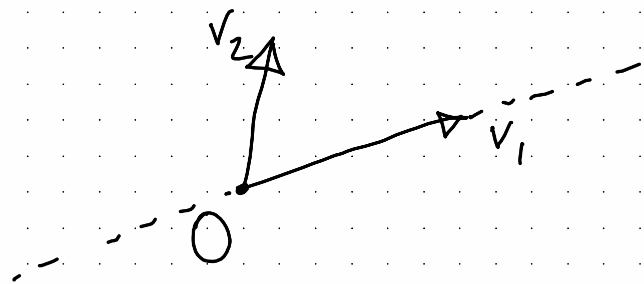
$$\lambda_1 v \neq 0_V \impliedby \lambda_1 \neq 0$$

se $\lambda_1 \neq 0$, $\exists \lambda_1^{-1}$, $\lambda_1^{-1}(\lambda_1 v) = 1 \cdot v = v$

dato che $v \neq 0_V$ allora anche $\lambda_1 v \neq 0_V$

Es: V_0^2

(v_1, v_2) sono indip.



basta che v_2 non sia allineato con v_1

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$$

$$\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2$$

se $\lambda_2 \neq 0$ $\quad -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1 = v_2$ (ma non è il caso caso assurdo)

$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_1 v_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

Es: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

(e^x, e^{2x}) sono indip.

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} \equiv 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

valuto in $x=0$

- $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

valuto in $x=1$

$$\lambda_1 e + \lambda_2 e^2 = 0$$

- $\lambda_1 + \lambda_2 e = 0$

sottraendo $\underbrace{(e-1)}_{\neq 0} \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

Lemma di dipendenza lineare

se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dip. $\Rightarrow \exists\, i \in \{1, \dots, n\}$
t.c. $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$

Dim: esistono coeff. non tutti nulli $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

$\Rightarrow$ λ_i sarà non nullo

$$\lambda_1 v_1 + \cancel{\dots} + \lambda_n v_n - \cancel{\lambda_i v_i} = -\lambda_i v_i$$

$$\boxed{v_i} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \underbrace{\dots\dots}_{\text{non c'è } v_i} - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$$

Lemma di indip. lineare

Siano $v_1, \dots, v_n$ lin. indip. allora
$(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ lin. indip. $\Leftrightarrow v_{n+1} \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Dim: per casa

Basi

Oss: se $B \subseteq V$ lin. indip. $\Rightarrow \forall S \subseteq B$
S lin. indip.

essere "lin. indip." è chiuso per sottoinsiemi

Oss: se $T \subseteq V$ t.c. $V = \mathrm{Span}(T)$
$\Rightarrow \forall S \supseteq T$, $V = \mathrm{Span}(S)$

essere "generatori" è chiuso per sovrainsiemi

Teorema fondamentale sull'indipendenza lin.

Sia V uno sp. vett. e sia T un insieme finito di generatori $(V = \mathrm{Span}(T))$

e sia B un insieme finito lin. indip. $(B \subseteq V)$

$$|B| \leq |T|$$

Dim: voglio sostituire un elem. in T con un elem. in B

$b_1 \in B$, dato che T genera V

$$\Rightarrow b_1 = \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n$$

dove $T = (t_1, \dots, t_n)$

almeno uno dei λ_i non è nullo

altrimenti $b_1 = 0$ è una relaz. di dip. dentro B

allora

$$-\lambda_i t_i = \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_{i-1} t_{i-1} - b_1 + \lambda_{i+1} t_{i+1} \dots$$

$$t_i = -\frac{\lambda_1 t_1}{\lambda_i} + \dots$$

allora $t_i \in \mathrm{Span}(T \setminus \{t_i\} \cup \{b_1\})$

$\Rightarrow \mathrm{Span}(T) = \mathrm{Span}$ " $= V$

quindi $T \setminus \{t_i\} \cup \{b_1\}$ genera alla fine otterrò che

$$\underbrace{T \setminus \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots\}}_{S} \cup B \quad \text{genera}$$

$$|S| = |B|$$

però $\quad S \subseteq T$

$$\Rightarrow \quad |S| \leq |T|$$

$$|B| \leq |T|$$

Def: $B \subseteq V$ sp. vett.

dove B è insieme finito t.c.

- B lin. indip.
- B genera V

si chiama **base** dello sp. V

Esempi di base

$$\mathbb{K}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{K} \right\}$$

allora $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base

si chiama base standard di $\mathbb{K}^2$

- $\underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

- per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \ \exists \lambda_1, \lambda_2 : \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

in generale in $\mathbb{K}^n$ ho elementi

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora $(e_1, \ldots, e_n)$ sono una base

e è detta base standard di $\mathbb{K}^n$

Esempi con i polinomi

$$V = \mathbb{K}[x]_{\leq n}$$

- $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ è base

  è detta "base standard dei polinomi"

- $\left(1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\right)$ è base : ex x casa

- $\left(1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n\right)$ è base : ex x casa

- $\left(1, \frac{x}{1!}, \frac{x(x-1)}{2!}, \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}, \dots\right)$

  è base

Es

$\left(1, x, \frac{x(x-1)}{2}\right)$ è base di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2} = V$

partendo da $(1, x, x^2)$

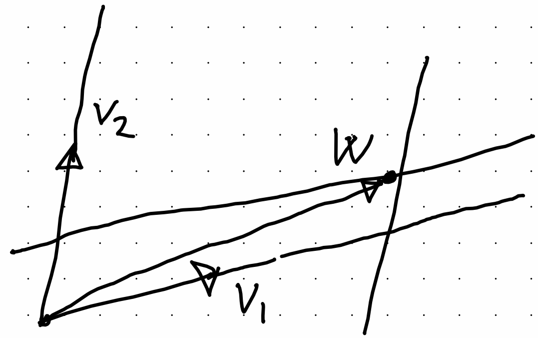
con il lemma di scambio

$V = \text{Span}(1, x, x^2) = \text{Span}\left(1, x, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right)$

rimane da mostrare che è lin. indip.

Esempio

V_0^2



v_1, v_2 non allineati

sono indip.

e generano $\Rightarrow$ sono una base

Cor del teor. fond. sull'indip.

Se B_1 e B_2 sono basi di V
$\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

Dim: $|B_1| \leq |B_2|$ perché B_1 indip.
B_2 genera

$|B_1| \geq |B_2|$ "

Def: la <u>dimensione</u> di V sp. vett.
è la cardinalità di una (qualsiasi)
sua base.

Prop: Se V è sp. vett. finitamente generato
($V = \mathrm{Span}(T)$ dove T è finito)
allora V ammette una base
(posso estrarre una base da T).