Richiami:

V è finitamente generato se $\exists\, v_1, \dots, v_k \in V$ t.c.
$$V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k).$$
$(k < +\infty)$.

Un sottosp. vettoriale U di V è un sottoinsieme non vuoto t.c. $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U \quad \forall u_1, u_2 \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$U \cap W$ è un sottosp. vettoriale se U, W lo sono

$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è il più piccolo sottosp. vett. che contiene $v_1, \dots, v_k$.

$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle \mathcal{T} \rangle :=$ il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $v_1, \dots, v_k$

$\mathcal{T} = \{v_1, \dots, v_k\}$. !

$v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle =:$ sottospazio generato da $v_1, \dots, v_k$.

Come sono fatti gli insiemi <u>minimali</u> di generatori per V?

"I sottoinsiemi propri non generano TUTTO V."

<u>Risposte</u>: Sono gli insiemi <u>linearmente indipendenti</u> di generatori

[Lemma di indipendenza lineare]:

$\mathcal{T}$ è lin. Ind. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Span}(\mathcal{T}) \neq \mathrm{Span}(\mathcal{T} \setminus \{v_i\})$ $\forall v_i \in \mathcal{T}$.

[lemma di dip. lineare]

$\mathcal{T}$ è lin. Dip. $\Leftrightarrow$ $\exists v_i \in \mathcal{T}$: $\mathrm{Span}(\mathcal{T}) = \mathrm{Span}(\mathcal{T} \setminus \{v_i\})$

Qual'è la cardinalità di un insieme minimale di generatori ?

Teorema fondamentale sull'indipendenza lineare

Se $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ e $S \subset V$ lin. Ind. allora

$$|S| \leq k.$$

$$\left| \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right| = 2$$

$$\left| \left\{ 1-x, 1+x, 1+x+x^2 \right\} \right| = 3$$

$$\left| \left\{ 1-x, 1-x \right\} \right| = 2$$

"Indip. Lineare" è chiuso per sottoinsiemi.

(Esercizio).

"Essere generatori" è chiusa per soprainsiemi;

$$V = \mathrm{Span}(\mathcal{T}) \supset \mathcal{L} \supset \mathcal{T} \quad \text{allora}$$

$$V \supseteq \mathrm{Span}(\mathcal{L}) \supseteq \mathrm{Span}(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathrm{Span}(\mathcal{L}) = \mathrm{Span}(\mathcal{T}).$$

$$\mathbb{R}^2 \overset{!}{=} \mathrm{Span}\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(e_1, e_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 .$$

Es: $\mathbb{R}^2 = \text{Span}(e_1, e_2)$. Quindi

$$\tau = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

è lin. Dipendente.

Infatti, se τ fosse lin. Ind. per il Teorema fondamentale sull'indipendenza lineare, $|\tau| \leq 2$, che è falso.

Def: Una base di uno spazio vettoriale V è un insieme finito $\mathcal{B}$ di vettori di V t.c.

1) $\mathcal{B}$ genera V, i.e. $V = \mathrm{Span}(\mathcal{B}) = \langle \mathcal{B} \rangle$

2) $\mathcal{B}$ è lin. Ind.

Riformuliamo:

1) Una base è un insieme minimale di generatori di V.

2) Una base è un insieme massimale linearmente indipendente.

COR: Se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono due basi di V,

$$|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|.$$

Def: La dimensione di uno spazio vettoriale V è la cardinalità di una sua base.

$$\dim V = \dim_{\mathbb{K}} V.$$

<u>Es</u>: $\mathbb{R}^2 = \text{Span}(e_1, e_2)$.

e_1, e_2 sono lin. indip.:

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff t_1 = t_2 = 0.$$

$$\mathbb{R}^n = \text{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

$$t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim \mathbb{K}^n = n.}$$

<u>Es</u>: $\mathbb{K}[x]_{\leq 1} = \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{K}\}$.

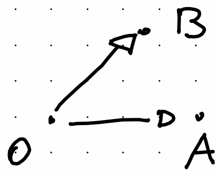
$\mathcal{B} = \{1, x\}$ è una base di $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$.

(Esercizio)

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ è una base di $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$.

$\dim \mathbb{K}[x]_{\leq n} = n + 1$.

Es: $\mathcal{V}_O^2$ $\quad O, A, B$ non allineati



$$\mathrm{Span}\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \mathcal{V}_O^2 .$$

OSS: $\{0_V\}$ ha come base $\emptyset$.

$\dim \{0_V\} = 0$.

$$\Rightarrow \quad \dim \mathcal{V}_O^2 \in \{1, 2\}.$$

Se $\dim \mathcal{V}_O^2 = 1$ allora $\left\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right\}$ è lin. Dip.

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad B$ giace sulla retta per O e A.

~~Ass.~~ ↯ contro l'ipotesi.

$$\Rightarrow \quad \dim \mathcal{V}_O^2 = 2 .$$

Teorema: Uno spazio vettoriale **finitamente generato** ammette una base.

dim: V è fin. gen. $V \neq \emptyset$.

Se $V = \{0_V\}$ è generato da $\emptyset$.

$V \neq \{0_V\}$. Sia $v_1 \neq 0_V$, $v_1 \in V$.

$\langle v_1 \rangle = V$

Fine

$\{v_1\}$ è una base di V

$\langle v_1 \rangle \neq V$

$\exists\, v_2 \in V$, $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$.

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ è lin. Indip.

Algoritmo di generazione di basi:

Input: $\{v_1, \dots, v_i\}$ lin. Ind.

$\langle v_1, \dots, v_i \rangle = V$

Fine: $\{v_1, \dots, v_i\}$ é una base

$\langle v_1, \dots, v_i \rangle \neq V$

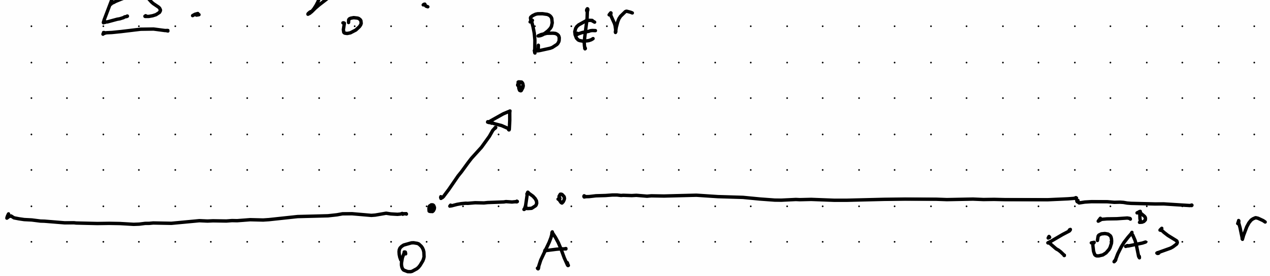
$\exists\, v_{i+1} \in V$ t.c. $v_{i+1} \notin \langle v_1, \dots, v_i \rangle$

$\{v_1, \dots, v_{i+1}\}$ è lin. Ind.

Ricominciamo

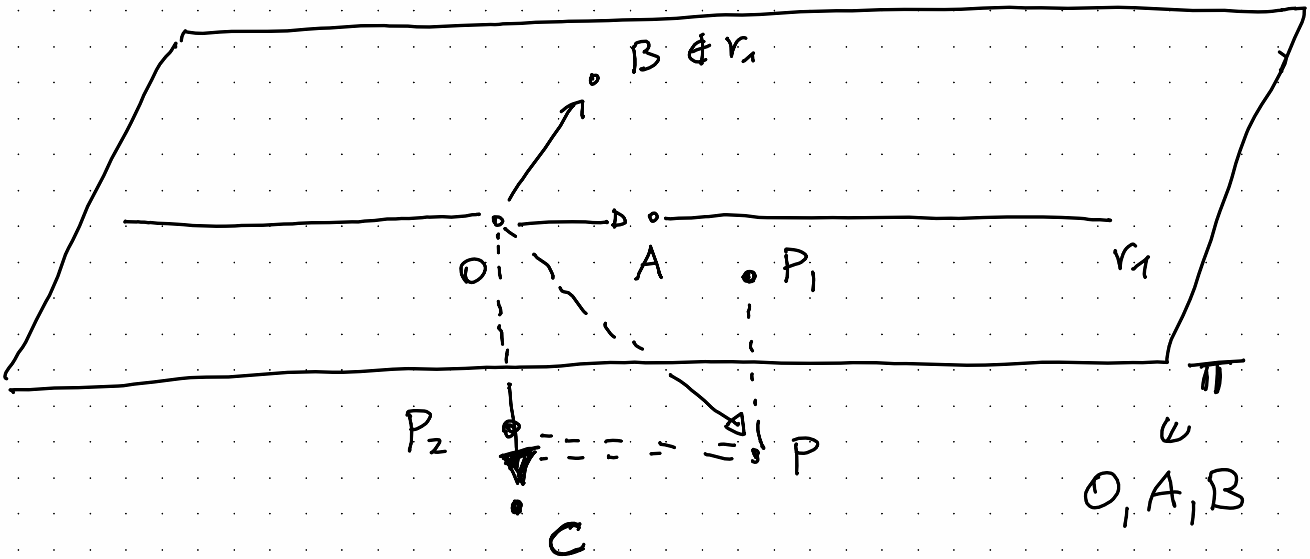
l'algoritmo Termina perché V è fin. gen. $\square$

Es: $\mathcal{V}_O^2$:



$$\mathrm{Span}(\vec{OA}, \vec{OB}) = \mathcal{V}_O^2$$

Es: $\mathcal{V}_O^3 = \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{E}^3 \}$



$\mathrm{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \mathcal{V}_O^3.$

Esercizio.

Coordinate

Oss: se $T \subseteq V$ sp. vett.
è un insieme di generatori
$V = \mathrm{Span}(T) = \langle T \rangle$

significa che $\forall\ v \in V \quad \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n$ dove $n = |T|$
tali che $\quad v = \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n$

l'associazione da v a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

non è unica in generale

Es: $V = \langle e_1 \rangle = \mathbb{K}^1$

$T = (e_1, e_1)$ chiaramente $V = \langle T \rangle$

$\uparrow \quad \uparrow$
$t_1 \quad t_2$

$v = 2e_1 \in V$

chiaramente $v = 2 \cdot e_1$

$= 2t_1 + 0 \cdot t_2 = 2t_2 + 0 \cdot t_1$

$= 1 \cdot t_1 + 1 t_2$

le scelte

$(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ per λ_1, λ_2 sono ugualm.

valide

Oss importante: Se $I \subseteq V$ è un insieme lin. indip. e $v \in V$ t.c. $v \in \mathrm{Span}(I)$

allora $\exists!$ (unici) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dove $n = |I|$ t.c.

$$v = \lambda_1 i_1 + \dots + \lambda_n i_n$$

Se avessi 2 scelte $\boxed{\text{diverse}}$ ma entrambe valide:

$$v = \lambda_1 i_1 + \dots + \lambda_n i_n$$

$$v = \lambda_1' i_1 + \dots + \lambda_n' i_n$$

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_1') i_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_n') i_n$$

però $\exists\, j : \lambda_j \neq \lambda_j' \Rightarrow (\lambda_j - \lambda_j') \neq 0 \Rightarrow$ ho trovato una relazione di dip. lineare.

Sia B t.c. genera e è lin. indip.

(= base)

$\Rightarrow \forall v \in V \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ dove $n = |B|$

$$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$$

e tali coeff. sono unici.

Def: diremo che $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sono le <u>coordinate</u> di V in base $B = (b_1, \dots, b_n)$

Ora abbiamo una funzione da V a $\mathbb{K}^n$

dato $v \in V$ ottenimo le sue coordinate in base B
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$
(sono t.c.
$v = \lambda_1 b + \dots + \lambda_n b_n$)

$$F_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

F_B si chiama "funzione delle coordinate in base B".

Richiamo: dati vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$

abbiamo una funzione che produce comb. lin.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in V$$

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

è l'inversa di F_B: se $(v_1, \ldots, v_n)$ sono una base di V

Oss 1: Se trovo una base B di V allora V assomiglia a $\underline{\mathbb{K}^{|B|}}$

Oss 2: È giusto fare comb. lin. con basi

Oss 3: In generale NON c'è una base preferita

$$B_1 \;,\; B_2 \qquad |B_1| = |B_2| =: \dim V$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{|B_2|} \arrow[r, leftrightarrow, "F_{B_2}"'] \arrow[rr, leftrightarrow, bend right, "="'] & V \arrow[r, leftrightarrow, "F_{B_1}"'] & \mathbb{K}^{|B_1|}
\end{tikzcd}$$

Questioni su sottospazi e dimensioni

Sia V sp. vett. fin. gen.

Fatto 1: se $U \subseteq V$ è sottospazio

allora $\dim U \leq \dim V$

Possiamo prendere una base di U: B_U

$B_U \subseteq V$ sono vettori di V indipendenti

se avessi rel. dip. lin. in V

allora questa lo sarebbe anche in U

non è detto che B_U generi V

Posso aggiungere vettori a B_U fino a ottenere una base $B_U \cup \{v_1, \dots, v_k\}$ di V

allora $\dim V = |B_U \cup \{v_1, \dots, v_k\}|$

$$= |B_U| + k$$

$$= \dim U + k$$

in particolare $k \geq 0$

$$\Rightarrow \dim V = \dim U + k \geq \dim U$$

Fatto 2: se $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$
(con l'ipotesi: $U \subseteq V$)