<u>Annuncio</u> : Il ricevimento si terrà su zoom, le istruzioni sono sulla pagina web e su e-learning.

<u>Richiami</u> : Una base di uno spazio vettoriale V è un insieme finito $\mathcal{B} \subset V$ t.c.

1) $\mathcal{B}$ genera V, i.e. $V = \langle \mathcal{B} \rangle$

2) $\mathcal{B}$ è lin. Ind.

Algoritmo di generazione di basi:

Input : insieme lin. Ind. $\mathcal{C}$

output : base $\mathcal{B}$ che contiene $\mathcal{C}$.

Un insieme lin. Ind. di V può essere completato ad una base:

V: finitamente generato

$\mathcal{I} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ lin. Ind.

$V = \langle \mathcal{I} \rangle$

$\Downarrow$

$\mathcal{I}$ è una base di V.

$V \neq \langle \mathcal{I} \rangle$

$\Downarrow$

$\exists \; v_{k+1} \in V$ t.c. $v_{k+1} \notin \langle \mathcal{I} \rangle$

$\Downarrow$ Lemma di Ind. Lin

$\mathcal{I} \cup \{v_{k+1}\} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ è lin. Ind.

<u>COR</u>: Se $U \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale allora

$$\dim U \leq \dim V. \qquad (\text{Se } V \text{ è f.g.}).$$

<u>dim</u>: Se $U = \{0_V\}$ allora $\dim U = 0$.

Se $U \neq \{0_V\}$. Sia $u_1 \in U \setminus \{0_V\}$.

Quindi $\{u_1\}$ è lin. Ind.

$$\langle u_1 \rangle = U \;\Downarrow\; \dim U = 1$$

$$\langle u_1 \rangle \neq U \;\Downarrow\; \exists\, u_2 \in U \setminus \langle u_1 \rangle \;\Downarrow\; \{u_1, u_2\} \text{ è lin. Ind.}$$

Se la $\dim U > \dim V$ allora $\exists\, \mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_k\}$ base di U.

Ma $\mathcal{B}_U \subset U \subset V$ e quindi $\mathcal{B}_U$ è lin. Ind. e sta in V.

Abbiamo visto che se U e W sono sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V allora

$U \cap W$ è un s.sp. vett. di V.

Che mi dite di $U \cup W = \{v \in V \mid v \in U \text{ oppure } v \in W\}$

Es: $\mathbb{R}^2 \supset e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U = \langle e_1 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$; $W = \langle e_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

$U \cup W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \text{ oppure } x_2 = 0 \right\}$

$e_1 + e_2 \in U \cup W$? NO. $\Rightarrow$ $U \cup W$ non è chiuso per la somma.

NB: $U \cup W$ è chiuso per prodotto per scalari.

Somma di sottospazi vettoriali

Siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali.
Definiamo la loro <u>somma</u> come

$$U + W = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}$$

<u>Es</u>: $\langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle = \mathbb{R}^2$ se $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Esercizio</u>: Dimostrare che $U+W$ è un sottospazio vettoriale di V (se U e W lo sono).

OSS: • $U \subset U+W$

Infatti: $u = u + 0_V \underset{\substack{\uparrow \\ 0_V \in W}}{\in} U+W \quad \forall u \in U$

• $W \subset U+W$

Infatti, $w = 0_V + w \underset{\substack{\uparrow \\ 0_V \in U}}{\in} U+W \quad \forall w \in W$

$\Rightarrow \quad U \cap W \subseteq U+W$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\subseteq$} & & \\ & & U+W & & \\ & \rotatebox[origin=c]{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox[origin=c]{135}{$\subseteq$} & \\ U & & & & W \\ & \rotatebox[origin=c]{135}{$\subseteq$} & & \rotatebox[origin=c]{45}{$\subseteq$} & \\ & & U \cap W & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \dim V & & \\ & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\leq$} & & \\ & & \dim(U+W) & & \\ & \rotatebox[origin=c]{45}{$\leq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\leq$} & \\ \dim U & & & & \dim W \\ & \rotatebox[origin=c]{90}{$\leq$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\leq$} & \\ & & \dim U \cap W & & \end{array}$$

Formula di Grassmann

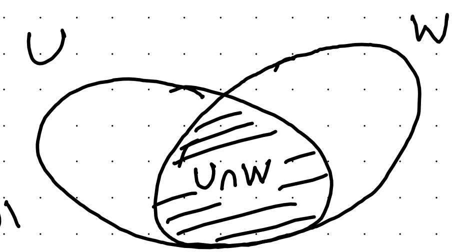
Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato.
Siano U e W due sottospazi vettoriali di V.
Allora

$$\boxed{\dim (U+W) = \dim U + \dim W - \dim (U\cap W)}$$

ovvero

$$\boxed{\dim (U+W) + \dim (U\cap W) = \dim U + \dim W}$$

$$V \supseteq U+W,\qquad U \subseteq U+W \supseteq W,\qquad U \supseteq U\cap W \subseteq W$$



$$\dim V \geq \dim(U+W),\qquad \dim U \leq \dim(U+W) \geq \dim W,\qquad \dim U \geq \dim U\cap W \leq \dim W$$

<u>dim</u>: Sia $\underbrace{\{v_1, \dots, v_k\}}_{\mathcal{B}_{U\cap W}}$ una base di $U \cap W$.
$(\dim U \cap W = k)$.

Estendiamo $\mathcal{B}_{U\cap W}$ ad una base di U con l'algoritmo di generazione di base

$$\mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_h\}$$

$(\dim U = h)$

Estendiamo $\mathcal{B}_{U\cap W}$ ad una base di W

$$\mathcal{B}_W = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_s\}$$

$(\dim W = s)$

Vogliamo dimostrare che

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = h + s - k.$$

Basta quindi dimostrare che

$$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{ v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_h, w_{k+1}, \dots, w_s \}$$

è una base di $U+W$.

1) $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è lin. Ind.:

$$\overbrace{x_1 v_1 + \dots + x_k v_k}^{X} + \overbrace{y_{k+1} u_{k+1} + \dots + y_h u_h}^{Y} + \overbrace{z_{k+1} w_{k+1} + \dots + z_s w_s}^{Z} = 0_V$$

per qualche $x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_h, z_{k+1}, \dots, z_s \in \mathbb{K}$.

$\Rightarrow \quad X \in U \cap W, \quad Y \in U, \quad Z \in W, \quad X + Y + Z = 0_V$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\cap \\ W}}{Z} = \underset{\substack{\cap \\ U}}{\underbrace{-X-Y}} \quad \Rightarrow \quad Z \in U \cap W$$

$\Rightarrow \quad \exists\, t_1, \dots, t_k \;$ t.c. $\; Z = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$

$\Rightarrow \quad z_{k+1} w_{k+1} + \dots + z_s w_s = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$

$$z_{k+1} w_{k+1} + \dots + z_s w_s = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ B_W \text{ è} \\ \text{lin. Ind.}}}{\Longrightarrow} \quad z_{k+1} = \dots = z_s = t_1 = \dots = t_k = 0$$

$$\Longrightarrow \quad X = Z = 0_V \quad \underset{X+Y+Z=0_V}{\Longrightarrow} \quad Y = 0_V$$

$$y_{k+1} u_{k+1} + \dots + y_h u_h = 0_V \quad \underset{\substack{\uparrow \\ B_U \text{ è} \\ \text{lin. Ind.}}}{\Longrightarrow} \quad y_{k+1} = \dots = y_h = 0$$

$$\Longrightarrow \quad Y = 0_V .$$

2) $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ genera $U+W$.

Sia $v \in U+W$. Allora, per definizione, esistono $u \in U$ e $w \in W$ t.c.

$$v = u + w.$$

Quindi $\exists\ t_1, \dots, t_h, z_1, \dots, z_s \in \mathbb{K}$ t.c.

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_K v_K + t_{K+1} u_{K+1} + \dots + t_h u_h.$$

$$w = z_1 v_1 + \dots + z_K v_K + z_{K+1} w_{K+1} + \dots + z_s w_s.$$

$$\Rightarrow \quad v = u + w = (t_1 + z_1) v_1 + \dots + (t_k + z_k) v_k + t_{K+1} u_{K+1} + \dots + t_h u_h + z_{K+1} w_{K+1} + \dots + z_s w_s \in \langle \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W \rangle.$$

$\boxtimes$

Es: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $(*)$

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

Calcolare dim $U+W$ e dim $U \cap W$.

Sol.: U è un sottospazio vettoriale:

a) $U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 = -x_2 - x_3 \right\}$

$$= \left\{ X = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

soluzioni-base dell'equazione

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$x_1 = -x_2 - x_3$

variabile DIPENDENTE o DOMINANTE

x_2, x_3: VARIABILI INDIPENDENTI o LIBERE

U è un sottosp. vettoriale e $\dim U = 2$.

b) $X, Y \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\alpha X + \beta Y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix} \overset{??}{\in} U$$

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) =$$

$$= \alpha \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\shortparallel \atop 0} + \beta \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{\shortparallel \atop 0} = 0$$

$\Rightarrow$ U è un sottospazio vettoriale.

$\dim U \in \{ \underset{\times}{0}, \underbrace{1, 2}, \underset{\times}{3} \}$ $\quad (\dim U \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3)$

$\boxed{\text{Se } \dim U = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \text{ allora } U = \mathbb{R}^3, \text{ assurdo perché } e_1 \notin U.}$

$\dim W = ?$ $\quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad U = \{ X \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

$\dim W \in \{1, 2\}$ ($\dim W \leq 2$ perché è generato da 2 elementi).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = t \\ 2 = -t \\ 1 = 2t \end{array}\right] = \text{Assurdo.}$$

$\Rightarrow \dim W = 2.$

$$3 \geq \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 4 - \dim U \cap W \geq 2$$

$\dim U+W$	2	3
$\dim U \cap W$	2 X	1

$\dim U+W = 3$
$\dim U \cap W = 1$ $\Rightarrow U+W = \mathbb{R}^3$

$\Uparrow$

Se $\dim(U \cap W) = 2 = \dim U = \dim W \Rightarrow U = W$.
Assurdo perché $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$.

Es: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.
Sia $\tau = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ un sottoinsieme linearmente indipendente, $|\tau| = n = \dim V$.
Allora τ è una base di V.

Sol.: Sia $U = \langle \tau \rangle \subseteq V$

Se $U \neq V$ allora $\exists\, v \in V$ t.c. $v \notin U$.

$\overset{\text{Lemma}}{\underset{\text{Ind. Lin.}}{\Longrightarrow}}$ $\tau \cup \{v\} = \{v_1, \dots, v_n, v\}$

è lin. Ind.

Ma $\dim V = n$ e quindi V è generato da n elementi.

Per il Teorema fondamentale sull' ind. lin.,
$n+1 = |\tau \cup \{v\}| \leq n$ contraddizione.

$\blacksquare$

Es: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Consideriamo la funzione "coordinate in $\mathcal{B}$"

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$F_{\mathcal{B}}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es: $F_{\mathcal{B}}(v_1) = F_{\mathcal{B}}(1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$

$$F_{\mathcal{B}}(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$$

$$F_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$F_{\mathcal{B}}$ è ben-definita:

$$\forall v \in V \ \exists!\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

Falso se $\mathcal{B}$ fosse lin. Dip.

<u>Es</u>: $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad v_1 = 1 v_1 = \frac{1}{2} v_2$

$F_{\mathcal{B}}$ è iniettiva:

$$F_{\mathcal{B}}(v) = F_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = w$$

<u>Esercizio</u>: $F_{\mathcal{B}}$ è suriettiva.

$\blacksquare$