Esercitazione

Es:

$V = Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$

calcolare $\dim V$

sotto esempio

$n = m = 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{K}^n = Mat_{n \times 1}(\mathbb{K})$

abbiamo $(e_1, \dots, e_n)$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

← i-esima componente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\circledast}{=} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}$$

in generale E_{ij} è la matrice con tutti i coeff. nulli tranne quello in riga i e colonna j.

- generano (vedi $\circledast$)
- lin. indip. (eser. ~~po~~ casa)

Somme e somme dirette

Dati ssp. vett. $U, W \subseteq V$

$U \cup W$ non è un sottosp.

$U + W = \{ u + w : u \in U, w \in W \}$

è un sottosp.

es: se $v_0 \in U$ e $-v_0 \in W$ allora

$0 + 0 = 0_V = v_0 + (-v_0)$

(significa che $U \cap W \neq 0$)

Def: diciamo che i sottospazi U, W stanno in somma diretta se $U \cap W = 0$

in tal caso indichiamo $U + W$ come $U \oplus W$

Oss: se $V = U \oplus W$ per qualche ssp. vett. U e $W \subseteq V$, allora $\forall v \in V$ esiste un'unica rappresentazione $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$

Infatti: prendiamo 2 rappresentazioni:

$$\underset{\underset{U}{\cup}}{u_1} + \underset{\underset{W}{\cup}}{w_1} = v = u_2 + w_2 \qquad \tilde{v} = \underset{\underset{U}{\cup}}{u_1 - u_2} = \underset{\underset{W}{\cup}}{w_2 - w_1}$$

allora $\tilde{v} \in U$

$\qquad\qquad \in W$

$\Rightarrow \in U \cap W$, ma per ipotesi: $U \cap W = 0 \Rightarrow$

$\tilde{v} = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$.

Es: $\mathbb{K}^2$

sappiamo che $\mathbb{K}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\mathbb{K}^2 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$

Occorre mostrare che:

1 $\langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle = \mathbb{K}^2$

2 $\langle e_1 \rangle \cap \langle e_2 \rangle = 0$

1) $\langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle = \{ \lambda e_1 + \mu e_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{K} \} = \langle e_1, e_2 \rangle$

2) se $v = \lambda e_1$ e $v = \mu e_2$ $\Rightarrow \lambda e_1 - \mu e_2 = 0 \Rightarrow \lambda, \mu = 0 \Rightarrow v = 0$

lin. indip.

Es (segue):

$$\mathbb{K}^3 = \left(\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle\right) \oplus \langle e_3 \rangle$$

$$\mathbb{K}^3 \overset{?}{=} \langle e_1 \rangle \oplus \left(\langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle\right)$$

è ovvio che $(U_1 + U_2) + U_3$

$$= U_1 + (U_2 + U_3)$$

perché sono entrambi

$$\{ u_1 + u_2 + u_3 \ : \ u_i \in U_i \}$$

visto che è vero ? scriveremo $\langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$

$$\left(\langle e_1\rangle \oplus \langle e_2\rangle\right) \cap \langle e_3\rangle$$

$$\lambda e_1 + \mu e_2 = v \quad = \nu e_3$$

$$\lambda e_1 + \mu e_2 - \nu e_3 = 0 \implies \lambda = \mu = \nu = 0 \implies v = 0$$

In generale $\quad \mathbb{K}^n = \langle e_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n\rangle$

Dire che $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$

è come dire

- $V = U_1 + \dots + U_n$
- $U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = 0 \quad \forall i$

il secondo punto significa questo (caso $n=3$):

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

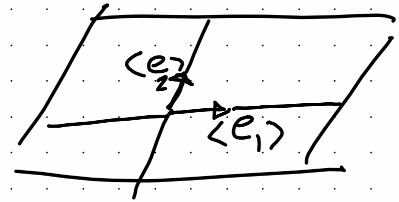
$i=1 \qquad U_1 \cap (U_2 + U_3) = 0$

$i=2 \qquad U_2 \cap (U_1 + U_3) = 0$

$i=3 \qquad U_3 \cap (U_1 + U_2) = 0$

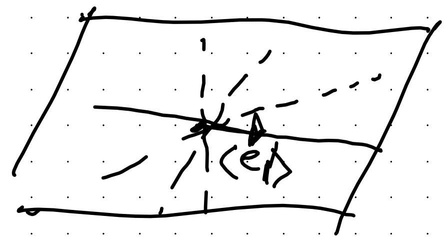
Riprendiamo un poco

$$\mathbb{K}^2 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$$



(Def: Se $V = U \oplus W$ allora chiamo W "supplementare" di U)

$$\mathbb{K}^2 = \langle e_1 \rangle \oplus W$$



In generale il supplementare di un sottospazio non è unico.

Es: trovare tutti i supplementari di $\langle e_1 \rangle$ in $\mathbb{K}^2$

sto cercando $W \subseteq \mathbb{K}^2$ t.c. $W + \langle e_1 \rangle = \mathbb{K}^2$

e $W \cap \langle e_1 \rangle = 0$

non posso prendere né $\langle e_1 \rangle$ né $\mathbb{K}^2$

deve essere che $W \neq 0$ altrimenti $W + \langle e_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$

[Elenchiamo tutti i sottosp. vett. di $\mathbb{K}^2$

se $U \subseteq V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$

questo significa che posso avere solo le dim: $\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 & \longrightarrow \text{l'unico spazio possibile è } 0 \\ 1 & \\ 2 & \longrightarrow \text{in questo caso } \dim U = \dim \mathbb{K}^2 \end{cases}$$

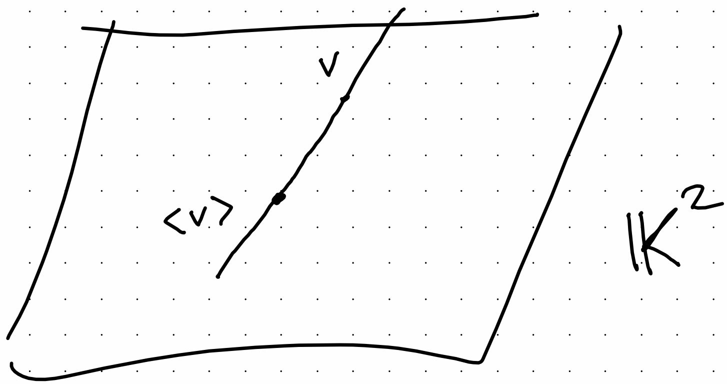
$$\Rightarrow U = \mathbb{K}^2$$

quindi c'è solo il caso $\mathbb{K}^2$

rimangono i sottosp. di $\dim = 1$

Ogni tale sottosp. U deve essere $\langle v \rangle$ per un opportuno $v \in \mathbb{K}^2$ purché $\{v\}$ lin. indip. cioè $v \neq 0$

Quindi abbiamo le rette



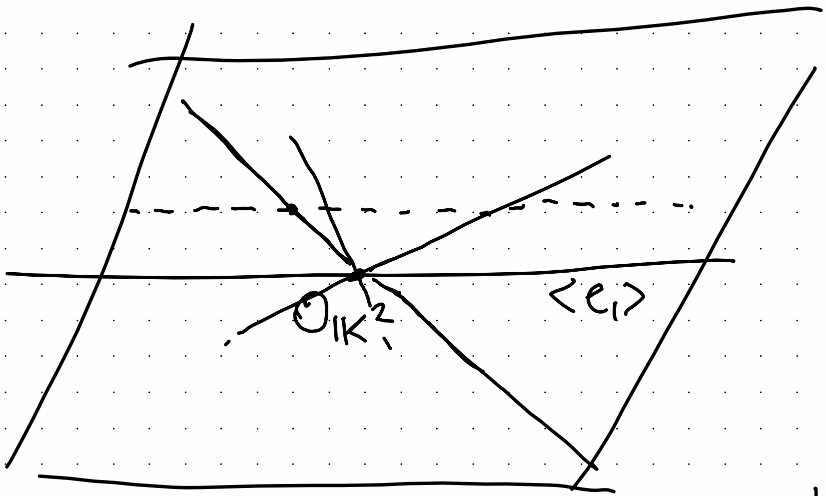
Attenzione:
non è vero che a vettori diversi corrispondono ssp. diversi
(es: v, $2v$)

$$\langle v \rangle = \langle w \rangle \iff v, w \text{ lin. dip.}$$

Per tornare all'esercizio

$$\mathbb{K}^2 = \langle e_1 \rangle \oplus W$$

possiamo prendere per W qualsiasi $\langle v \rangle$
purché $v \notin \langle e_1 \rangle$



$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

possiamo prendere

$$v = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $x \in \mathbb{K}$
otteniamo tutti i sottospazi

Es: matrici simmetriche e antisimmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$$

la "trasposta di A" è la matrice

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

in generale $[A^t]_{ij} := [A]_{ji} \quad \forall\, i,j$

e dunque $A^t \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$

A si dice "simmetrica" se $A = A^t$

(ha senso solo se A è quadrata)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A = A^t \iff \begin{array}{ll} a = a & \checkmark \\ \boxed{b = c} & \\ c = b & (\vee) \\ d = d & \checkmark \end{array}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ è simmetrica

A si dice "antisimmetrica" se $A = -A^t$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A = -A^t \iff \begin{cases} a = -a \\ b = -c \\ c = -b \\ d = -d \end{cases}$$

quindi $a = 0$ $d = 0$ $b = -c$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Es: $S_n = \{ A : A \text{ simmetrica}, \ A \in Mat_{n\times n} \}$

$A_n = \{ A : A \text{ antisimmetrica}, \ A \in Mat_{n\times n} \}$

Mostrare che:

$$Mat_{n\times n} = S_n \oplus A_n$$

caso $n=2$

$$\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} : a,b,d \in \mathbb{K} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{K} \right\}}_{} = Mat_{n\times n}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{K} \right\} \ {}^{\shortparallel}$$

In generale se A è simm.

$$A = A^t$$

se A è antisimm.

$$A = -A^t$$

quindi ogni $A \in S_n \cap A_n$

deve essere t.c. $A = A^t = -A$

$$2A = 0$$

$$A = 0$$

$$S_n + A_n = Mat_{n \times n}$$

$S_n + A_n = Mat_{n \times n}$ data $A \in Mat_{n \times n}$

$B = A + A^t$

$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = B$

$C = A - A^t$

.... otteniamo $C = -C^t$

vorrei una scrittura tipo $A \approx B + C$

$$\begin{array}{c} B + C \\ \shortparallel \\ A + A^t + A - A^t = 2A \end{array}$$

$$A = \underbrace{\frac{A + A^t}{2}}_{\in S_n} + \underbrace{\frac{A - A^t}{2}}_{\in A_n}$$

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 5}$

$U_1 = \{ p(x) : \ p(x) = p(-x) \} \subseteq V$

$U_2 = \{ p(x) : \ p(x)$ è multiplo di $x^2+1 \} \subseteq V$

Calcolare $\dim U_1$ e $\dim U_2$

$\dim U_2$: voglio una base di U_2

$$p(x) = (x^2+1)\, q(x) = \underbrace{(x^2+1)(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)}$$

$$= a_3 \underbrace{(x^2+1)x^3}_{\dots} + a_2 \underbrace{(x^2+1)x^2}_{\dots} + \dots$$

$$\left((x^2+1)x^3,\ (x^2+1)x^2,\ (x^2+1)x,\ (x^2+1)\cdot 1\right) = B$$

sono una base

(Es 1.3.20 dal Bottacin)

$$\dim U_2 = 4$$

Scrivere esplicitamente $F_B : U_2 \to \mathbb{R}^4$

$$F_B(a_5x^5 + \dots + a_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$a_5x^5 + a_4x^4 + \dots + a_0 = \lambda_1(x^2+1)x^3 + \lambda_2 \dots$$

$$\lambda_1 = a_5 \qquad \lambda_2 = a_4 \qquad \lambda_3 = a_1 \qquad \lambda_4 = a_0$$