Funzioni tra spazi vettoriali: Le applicazioni lineari

Def: Siano V e W due spazi vettoriali su uno stesso campo $\mathbb{K}$.

Una funzione

$$\mathcal{L} : V \longrightarrow W$$

si dice un' applicazione lineare o funzione lineare se

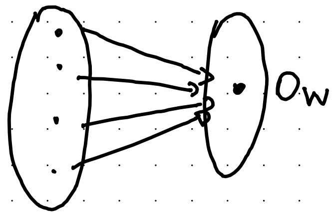
1) $\mathcal{L}(v_1 + v_2) = \mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_2)$ "$\mathcal{L}$ preserva le somme"

2) $\mathcal{L}(\alpha v) = \alpha \mathcal{L}(v)$ "$\mathcal{L}$ preserva il prodotto per scalari"

$\forall v_1, v_2, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Es: La funzione <u>nulla</u>:

$$\mathcal{L}: V \to W : \quad \mathcal{L}(v) = 0_W \quad \forall v \in V$$



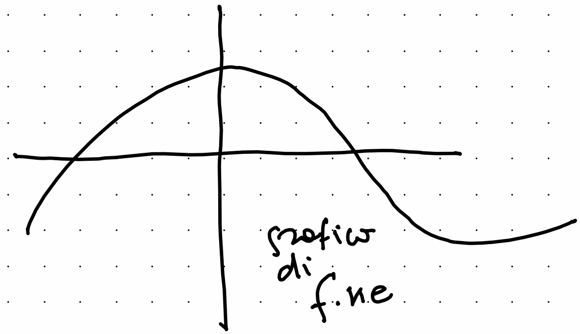
$\mathcal{L}$ è lineare

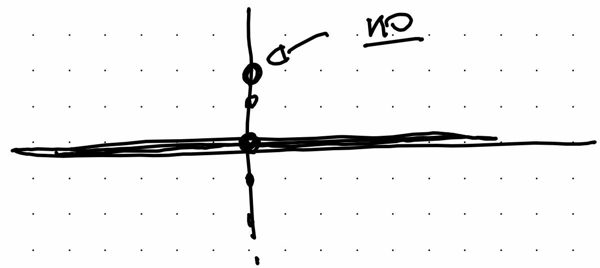
$$\mathcal{L}(v_1 + v_2) = 0_W = 0_W + 0_W$$

$$= \mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_2)$$

$$\mathcal{L}(\alpha v) = 0_W = \alpha\, 0_W$$

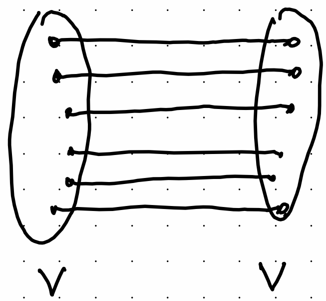
$$= \alpha\, \mathcal{L}(v).$$





Es: La funzione <u>identità</u>

$$Id_V = \mathbb{1}_V : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ v & \longmapsto & v \end{array}$$



Id_V è lineare: $Id_V(v_1+v_2) = v_1+v_2 = Id_V(v_1) + Id_V(v_2)$

$$Id_V(\alpha v) = \alpha v = \alpha\, Id_V(v).$$

OSS: $\mathcal{L}: V \to W$ è lineare se e solo se

$$\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\, \mathcal{L}(v_1) + \beta\, \mathcal{L}(v_2)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall v_1, v_2 \in V$.

Non-esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = x + 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Non è lineare:

$$f(1+1) = 3$$

$$f(1) + f(1) = 4 \neq 3 = f(1+1).$$

Esempio più importante:

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è una funzione lineare:

dimostrazione: Siano $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Allora

$$F_{\mathcal{B}}(\alpha v + \beta w) = F_{\mathcal{B}}\left((\alpha x_1 + \beta y_1) v_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) v_2 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) v_n \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha F_{\mathcal{B}}(v) + \beta F_{\mathcal{B}}(w) \quad \blacksquare$$

Non-esempi:

- $f(x) = x^2$ non è lineare:

$$f(1+1) = 4 \,, \quad f(1)+f(1) = 2 \neq 4 = f(1+1)$$

- $f(x) = x^n$ è lineare se e solo se $n = 1$.

- $f(x) = \sin(x)$

$$\sin(\pi) = 0 = \sin\left(2\,\frac{\pi}{2}\right) \overset{?}{\neq} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

__Proposizione__ : Sia $\mathcal{L}: V \to W$ una funzione lineare.
Allora

$$\mathcal{L}(0_V) = 0_W.$$

__Dimostrazione:__

$$\mathcal{L}(0_V) = \mathcal{L}(0\, 0_V) = 0\, \mathcal{L}(0_V) = 0_W.$$

$\blacksquare$

__COR:__ Se $f: V \to W$ è una funzione e $f(0_V) \neq 0_W$ allora f non è lineare.

__Es:__ $f(x) = \cos(x)$ non è lineare, perché

$$\cos(0) = 1 \neq 0.$$

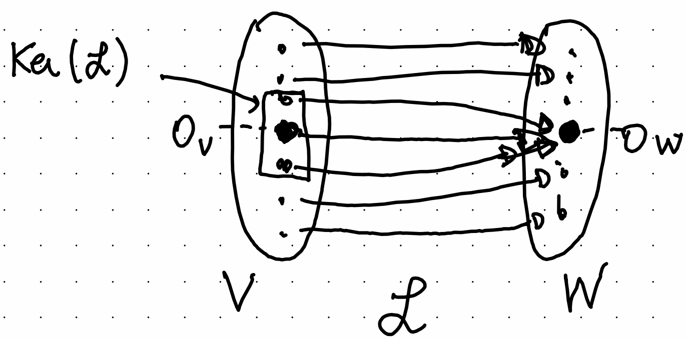
Nucleo di una funzione lineare.

Sia $\mathcal{L}: V \to W$ una funzione lineare.

Definizione: Il nucleo o Kernel di $\mathcal{L}$ è

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \{ v \in V \mid \mathcal{L}(v) = 0_W \}} = \mathcal{L}^{-1}(0_W)$$

= "controimmagine di 0_W"



Proposizione :

Sia $\mathcal{L}: V \to W$ un' applicazione lineare.

Allora

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \{ v \in V \mid \mathcal{L}(v) = 0_W \}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione : Siano $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}$, siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) \underset{\text{Def}}{=} \alpha \mathcal{L}(v_1) + \beta \mathcal{L}(v_2) = \alpha 0_W + \beta 0_W = 0_W$$

$$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}).$$

$\blacksquare$

<u>Es</u>: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita come

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

è lineare:

$$\mathcal{L}\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(\alpha x_1 + \beta y_1) + 3(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ (\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) \end{pmatrix}$$

Def di $\mathcal{L}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(2x_1 + 3x_2) + \beta(2y_1 + 3y_2) \\ \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2y_1 + 3y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \alpha\, \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + \beta\, \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\,(\mathcal{L}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{L}(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x_1+3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 5x_1 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ 0_{\mathbb{R}^2} \right\}.$$

<u>Es</u>: •) $Id_V : V \to V$ la f.ne identità.

$$\operatorname{Ker}(Id_V) = \{0_V\}$$

•) $0 : V \to W : v \mapsto 0_W$ la f.ne nulla

$$\operatorname{Ker}(0) = V$$

•) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2x$ è lineare.

$$\operatorname{Ker}(f) = \{0\}.$$

.) $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}$ è lineare:

$$\mathcal{L}(\alpha X + \beta Y) = \mathcal{L}\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\alpha x_1 + \beta y_1) + 3(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ 2(\alpha x_1 + \beta y_1) + 3(\alpha x_2 + \beta y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(2x_1 + 3x_2) + \beta(2y_1 + 3y_2) \\ \alpha(2x_1 + 3x_2) + \beta(2y_1 + 3y_2) \end{pmatrix} = \alpha\, \mathcal{L}(X) + \beta\, \mathcal{L}(Y).$$

$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^2)$.

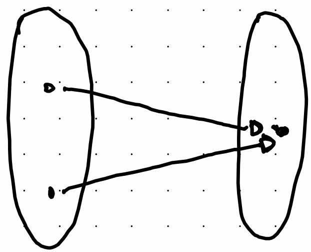
$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{L}(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \} =$$

$$= \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid (2x_1 + 3x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

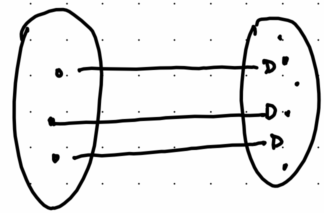
$$= \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0 \} = \left\langle \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Richiami: Una funzione $f: X \longrightarrow Y$ si dice <u>iniettiva</u> se

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$



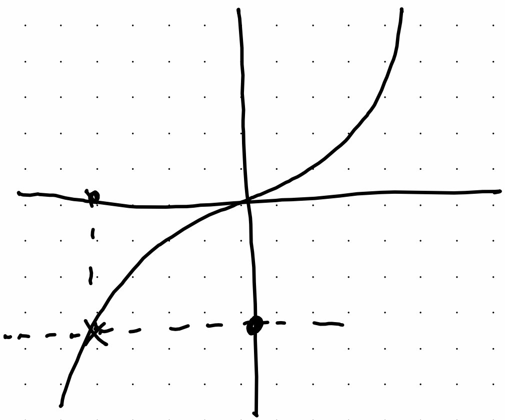
non è iniettiva



iniettiva

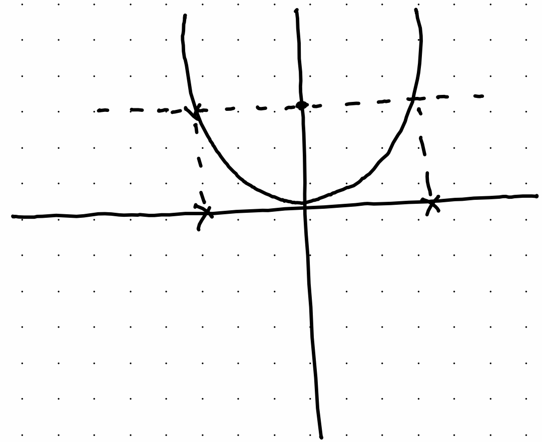
$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Esercizio: $f(x) = x^3$ è iniettiva.



$f(x) = x^3$

iniettiva.



$f(x) = x^2$

non è iniettiva

$f(2) = f(-2) = 4$

Teorema: Sia $\mathcal{L}: V \longrightarrow W$ una funzione lineare.
Allora

$$\mathcal{L} \text{ è iniettiva } \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \{0_V\}.$$

Dimostrazione:

$\Rightarrow$) Supponiamo che $\mathcal{L}$ sia iniettiva. Sia $v \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L})$.
Allora

$$\mathcal{L}(v) = 0_W \overset{\mathcal{L} \text{ lineare}}{=} \mathcal{L}(0_V) \underset{\mathcal{L} \text{ iniettiva}}{\Longrightarrow} v = 0_V.$$

$\Leftarrow$) Supponiamo che $\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{0_V\}$. Siano $v_1, v_2 \in V$ t.c.

$$\mathcal{L}(v_1) = \mathcal{L}(v_2) \Rightarrow \mathcal{L}(v_1) - \mathcal{L}(v_2) = 0_W$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(v_1 - v_2) = 0_W \Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2. \Rightarrow \mathcal{L} \text{ è iniettiva.} \blacksquare$$

<u>Es</u>: ·) La funzione

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

è iniettiva.

·) La funzione

$$\mathcal{L}(X) = 2x_1 + 3x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non è iniettiva.

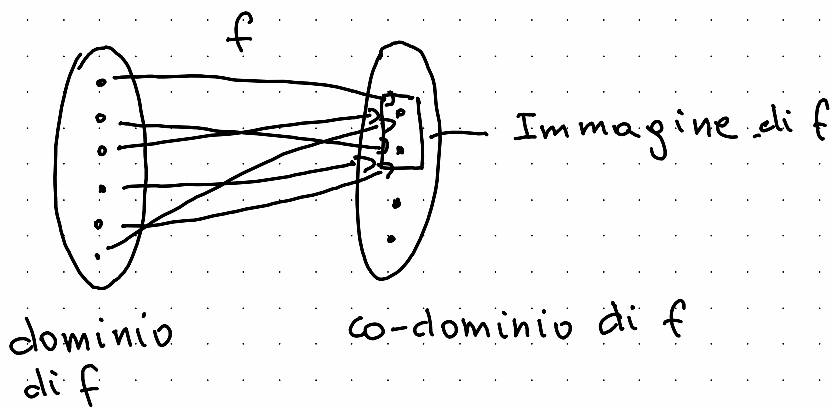
Immagine di una f.ne lineare.

Definizione: Sia $\mathcal{L} : V \longrightarrow W$ una funzione.

L' **immagine** di $\mathcal{L}$ è

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V : \mathcal{L}(v) = w \}$$

$$= \{ \mathcal{L}(v) \mid v \in V \} \subseteq W$$



$\underline{Es}$: $\quad \mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{L} = \left\{ \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in particolare, è un sottospazio vettoriale.

Teorema: L'immagine di un' applicazione lineare

$$\mathcal{L}: V \longrightarrow W$$

è un sottospazio vettoriale di W.

Dimostrazione:

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, siano $v_1, v_2 \in V$.

$$\alpha\, \mathcal{L}(v_1) + \beta\, \mathcal{L}(v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{L} \text{ è} \\ \text{lineare}}}{=} \mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \mathrm{Im}(\mathcal{L}).$$

$\boxtimes$

Teorema (della dimensione)

Sia $\mathcal{L} : V \to W$ un' applicazione lineare.
Se V è finitamente generato allora

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{L} = \dim V}$$

Dimostrazione: (domani)