<u>Richiami</u>: Una funzione o applicazione lineare è una funzione

$$\mathcal{L} : V \longrightarrow W$$

tra due spazi vettoriali V e W su uno stesso campo $\mathbb{K}$ tale che

$$\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathcal{L}(v_1) + \beta \mathcal{L}(v_2)$$

per ogni $v_1, v_2 \in V$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Il nucleo o Kernel di $\mathcal{L}$ è

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \{ v \in V \mid \mathcal{L}(v) = 0_W \} \subseteq V$$

è un sottospazio vettoriale.

L'immagine di $\mathcal{L}$ è

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \{ \mathcal{L}(v) \mid v \in V \} \subseteq W$$

è un sottosp. vettoriale.

$\mathcal{L}$ è iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \{0_V\}$

$\mathcal{L}$ è suriettiva $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = W$.

Esempio importante:

Sia $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V, allora la funzione "coordinate nella base $\mathcal{B}$"

$$F_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \quad v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

è lineare, iniettiva e suriettiva.

Teorema (della dimensione):

Sia $\mathcal{L}: V \to W$ una funzione lineare.
Se V è finitamente generato, allora

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) + \dim \operatorname{Im}(\mathcal{L}) = \dim V}$$

dim: Sia $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathcal{L})} = \{v_1, \dots, v_K\}$ una base di $\operatorname{Ker}(\mathcal{L})$.
($\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = K$). Estendiamo $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathcal{L})}$ ad una base

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_K, v_{K+1}, \dots, v_n\}$$

di V. Dimostriamo che

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\mathcal{L}} = \{\mathcal{L}(v_{K+1}), \mathcal{L}(v_{K+2}), \dots, \mathcal{L}(v_n)\} \subset W$$

è una base di $\operatorname{Im}(\mathcal{L})$.

1) $\mathcal{B}_{Im(\mathcal{L})}$ è lin. Ind. .

$$x_{k+1}\,\mathcal{L}(v_{k+1}) + x_{k+2}\,\mathcal{L}(v_{k+2}) + \dots + x_n\,\mathcal{L}(v_n) = 0_W$$

$(x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{K})$.

$$\underset{\mathcal{L} \text{ è lineare}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{L}(x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n) = 0_W$$

$$\Longrightarrow \quad x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) \cap \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle \underset{\mathcal{B} \text{ è lin. ind.}}{=} \{0_V\}$$

$$\Longrightarrow \quad x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n = 0_V$$

$$\underset{\{v_{k+1}, \dots, v_n\} \text{ è lin. Ind.}}{\Longrightarrow} \quad x_{k+1} = \dots = x_n = 0.$$

2) $\mathcal{B}_{Im(\mathcal{L})}$ genera $Im(\mathcal{L})$.

Sia $w \in Im(\mathcal{L})$. Allora esiste $v \in V$ t.c. $\mathcal{L}(v) = w$.
Quindi $\exists!\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n$$

(perché $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ è una base di V).
Allora

$$w = \mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n)$$

$$= \underbrace{x_1 \underset{0_W}{\underset{\parallel}{\mathcal{L}(v_1)}} + \dots + x_k \underset{0_W}{\underset{\parallel}{\mathcal{L}(v_k)}}}_{\substack{\parallel \\ 0_W}} + x_{k+1} \mathcal{L}(v_{k+1}) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n)$$

$$= x_{k+1} \mathcal{L}(v_{k+1}) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n)$$

$$\in \langle \mathcal{L}(v_{k+1}), \dots, \mathcal{L}(v_n) \rangle = \langle \mathcal{B}_{Im(\mathcal{L})} \rangle.$$

$\boxtimes$

<u>OSS</u>: Per trovare una base di $\operatorname{Im} \mathcal{L}$:

1) Trovare una base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L} \subset V$: $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}\mathcal{L}}$

2) Estenderla ad una base di V: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\operatorname{Ker}\mathcal{L}} \cup \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$

3) Una base di $\operatorname{Im} \mathcal{L}$ è ottenuta prendendo le immagini dei vettori che completano la base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$.

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im}(\mathcal{L})} = \mathcal{L}(\mathcal{B}) \setminus \{0_W\} = \{\mathcal{L}(v_{k+1}), \dots, \mathcal{L}(v_n)\}.$$

Es:

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2 \\ 2x_1+3x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \left\{ X \mid 2x_1+3x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1+3x_2 = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Una base di $\operatorname{Im}(\mathcal{L})$ è

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im}(\mathcal{L})} = \left\{ \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2 \\ 2x_1+3x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es: $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}$ è lineare (esercizio!).

$$\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \left\{ X \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\} = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ è iniettiva. $\dim \operatorname{Im} \mathcal{L} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{L} = 3$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Im} \mathcal{L} = \mathbb{R}^3$.

$\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ base di $V = \mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im}(\mathcal{L})} = \left\{ \mathcal{L}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1,\ \mathcal{L}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2,\ \mathcal{L}(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxtimes$

Teorema: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Siano $w_1, \dots, w_n \in W$. Allora esiste un'unica funzione lineare

$$\mathcal{L} : V \longrightarrow W$$

tale che

$$\mathcal{L}(v_1) = w_1, \ \mathcal{L}(v_2) = w_2, \dots, \ \mathcal{L}(v_n) = w_n.$$

"Una funzione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base. In particolare, servono solo un numero finito di assegnazioni per determinare una f.ne lineare"

dim: Definiamo

$$\mathcal{L}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n.$$

(Esercizio)

Questa $\mathcal{L} : V \to W$ così definita è lineare e $\mathcal{L}(v_i) = w_i$ $\forall\, i = 1, \dots, n$. $\mathcal{L}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 \mathcal{L}(v_1) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n =$
$= x_1 \mathcal{L}'(v_1) + \dots + x_n \mathcal{L}'(v_n) = \mathcal{L}'(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)$.

$\boxtimes$

Diciamo che $\mathcal{L}$ è l'unica f.ne lineare che <u>estende per linearità</u> la f.ne.

$$v_1 \longmapsto w_1$$
$$v_2 \longmapsto w_2$$
$$\vdots$$
$$v_n \longmapsto w_n .$$

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

$\mathcal{B} = \{1-x, 1+x, 1+x+x^2\}$ base di V.

Sia $\mathcal{L}$ l'unica f.ne lineare tale che

$$\mathcal{L}(1-x) = x+3$$
$$\mathcal{L}(1+x) = 2x-2$$
$$\mathcal{L}(1+x+x^2) = 3x+1$$

$$2 = (1-x)+(1+x)$$

Trovare nucleo e immagine di $\mathcal{L}$.

Sol.: Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. $p(x) = a_0(1-x)+a_1(1+x)+a_2(1+x+x^2)$

$$\mathcal{L}(p(x)) = a_0(x+3)+a_1(2x-2)+a_2(3x+1)$$

$$\mathcal{L}(1) = \mathcal{L}\left(\tfrac{1}{2}(1-x)+\tfrac{1}{2}(1+x)\right) = \tfrac{1}{2}(x+3)+\tfrac{1}{2}(2x-2)$$
$$= \tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2}$$

$$\mathcal{L}(p(x)) = a_0(x+3) + a_1(2x-2) + a_2(3x+1) = 0_W$$

$$(a_0+2a_1+3a_2)x + (3a_0-2a_1+a_2) = 0x+0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0+2a_1+3a_2=0 \\ 3a_0-2a_1+a_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a_0+4a_2=0 \\ 3a_0-2a_1+a_2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0=-a_2 \\ -3a_2-2a_1+a_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=-a_2 \\ 2a_1=-2a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=-a_2 \\ a_1=-a_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker}\mathcal{L} = \{ a_0(1-x)+a_1(1+x)+a_2(1+x+x^2) \mid a_0=-a_2,\ a_1=-a_2 \}$$

$$= \{ -a_2(1-x)-a_2(1+x)+a_2(1+x+x^2) \mid a_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ a_2(-1+\cancel{x}\cancel{-1}\cancel{-x}\cancel{+1}+x+x^2) \mid a_2 \in \mathbb{R} \} = \langle -1+x+x^2 \rangle$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}} = \{-1+x+x^2\} \qquad \mathcal{B} = \{1-x,\ 1+x,\ 1+x+x^2\}$$

$$\mathcal{B} = \{-1+x+x^2,\ x^2,\ 1+x\} \subset V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,\mathcal{L}} = \{\mathcal{L}(x^2),\ \mathcal{L}(1+x)\}$$

$$x^2 = -(1+x) + (1+x+x^2)$$

$$\mathcal{L}(x^2) = -\mathcal{L}(1+x) + \mathcal{L}(1+x+x^2) = -(2x-2) + (3x+1) = x+3$$

$$\mathcal{L}(1+x) = 2x-2$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,\mathcal{L}} = \{x+3,\ 2x-2\}$$

$$\left(\begin{array}{l} a_0(x+3) + a_1(2x-2) = 0+0x \\ (a_0+2a_1)x + (3a_0-2a_1) = 0+0x \end{array} \quad \begin{cases} a_0+2a_1=0 \\ 3a_0-2a_1=0 \end{cases} \quad \left.\begin{array}{l} a_0 = -2a_1 \\ a_0 = \frac{2}{3}a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_0=a_1=0. \right)$$

Esempio di funzioni lineari : Le Proiezioni

Sia V uno spazio vettoriale f.g.
Sia $U \subset V$ un s.spazio vettoriale.
Scegliamo un supplemento W di U in V.

$$V = U \oplus W$$

Definiamo la proiezione su U lungo W come la funzione

$$\boxed{pr_U^W : V \longrightarrow V \ : \ pr_U^W(u+w) = u}$$

$\forall u \in U, \forall w \in W$.

Vediamo che pr_U^W è ben-definita:

$$\forall v \in V \quad \exists!\, u \in U \text{ ed } \exists!\, w \in W \quad t.c. \quad v = u + w.$$

Infatti, se $\mathcal{B}_U = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset U$ è una base di U e

$\mathcal{B}_W = \{v_{k+1}, \ldots, v_n\} \subset W$ è una base di W

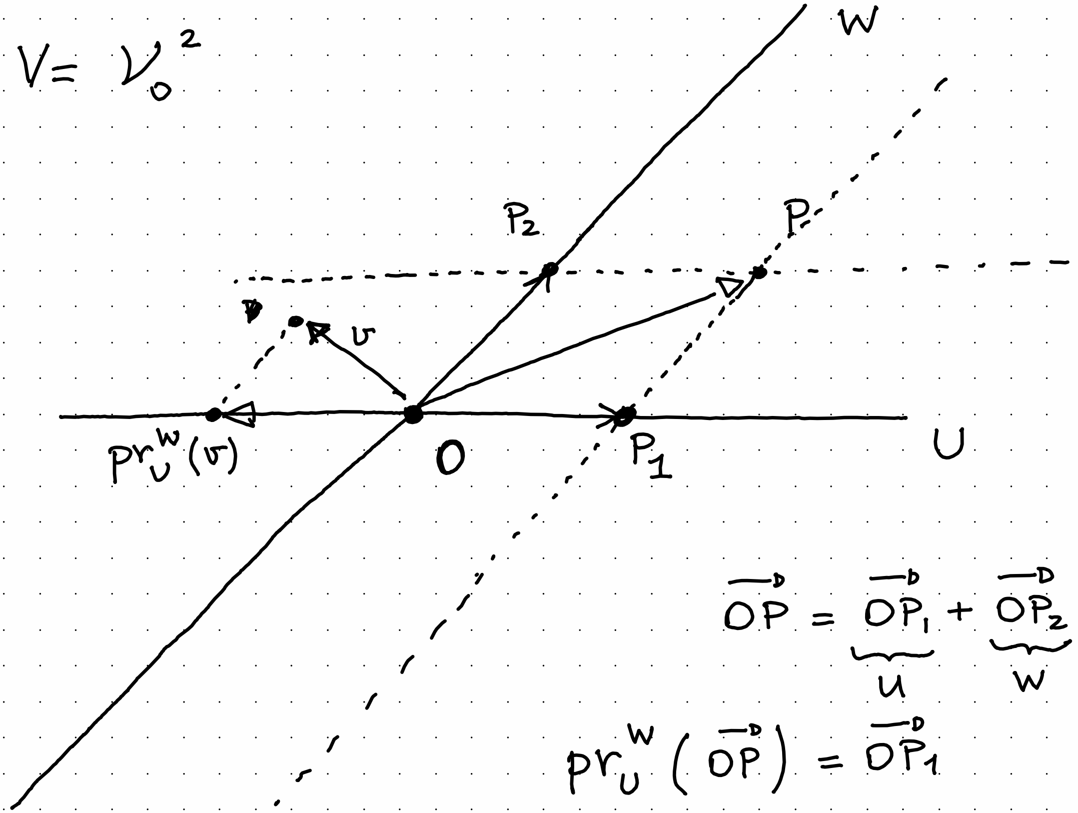
allora

$$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\} \text{ è una base di } V.$$

Quindi

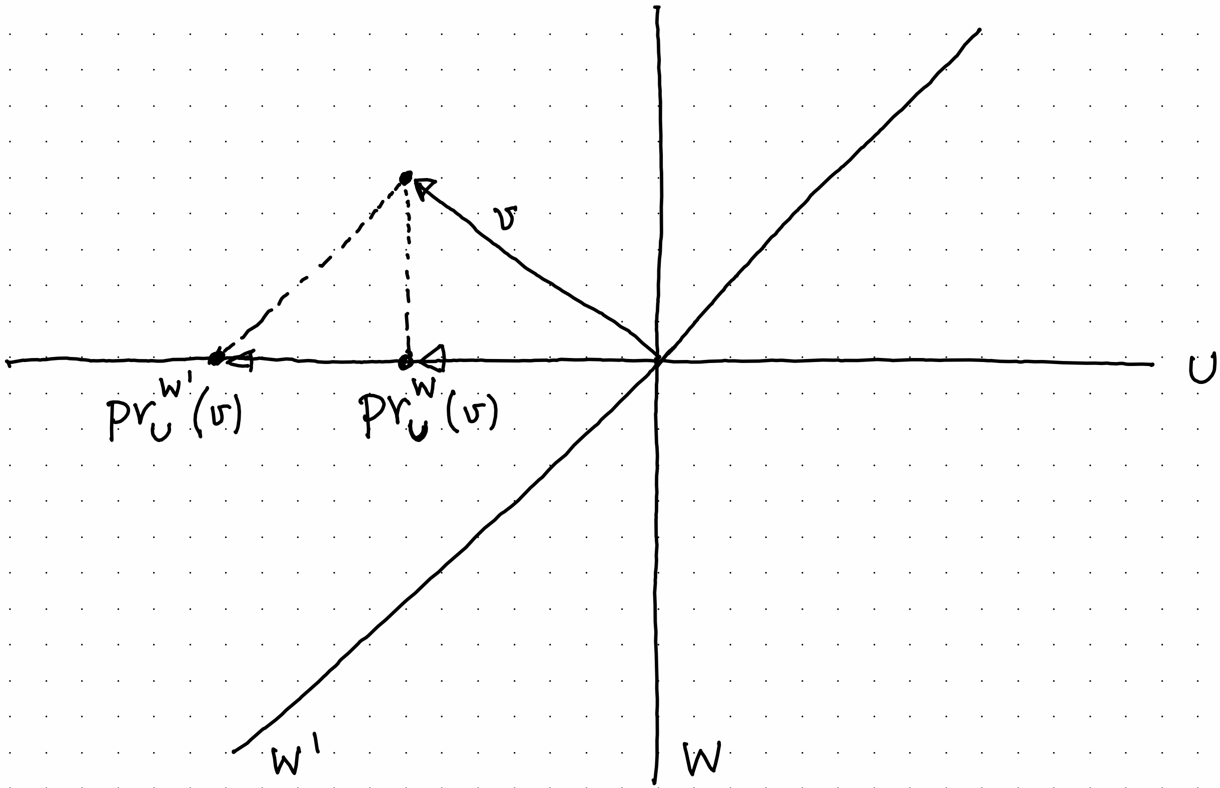
$$\forall v \in V \quad \exists!\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \quad t.c. \quad v = \underbrace{x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k}_{u} + \underbrace{x_{k+1} v_{k+1} + \ldots + x_n v_n}_{w},$$

Es: $V = \mathcal{V}_O^2$



$$\overrightarrow{OP} = \underbrace{\overrightarrow{OP_1}}_{U} + \underbrace{\overrightarrow{OP_2}}_{W}$$

$$pr_U^W\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OP_1}$$



v
U
$pr_U^{W'}(v)$
$pr_U^{W}(v)$
W'
W