Richiami: Siano V e W due sp. vett. su $\mathbb{K}$.

Una funzione

$$\mathcal{L}: V \longrightarrow W$$

si dice lineare se $\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathcal{L}(v_1) + \beta \mathcal{L}(v_2)$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall v_1, v_2 \in V$.

- $F_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\} \subset V$ base : "Funzione coordinate"
  è lineare

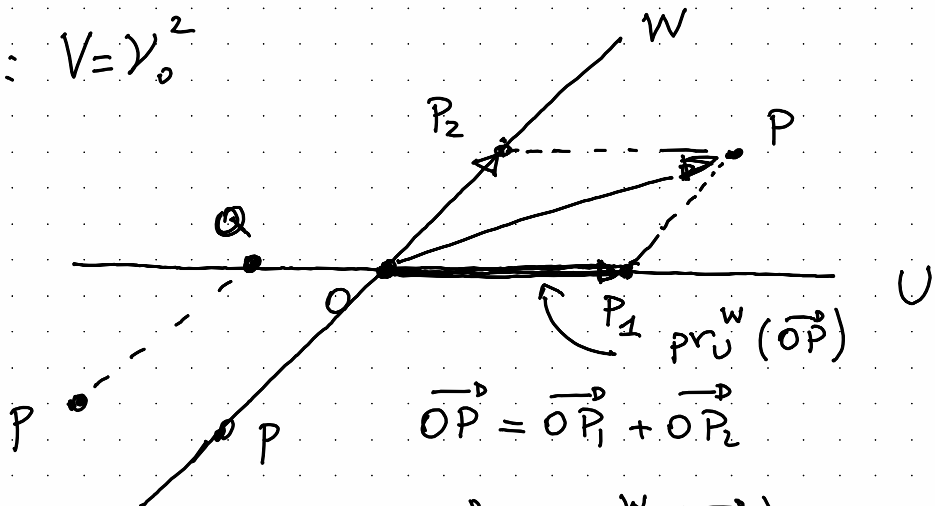
- $pr_U^W : U \oplus W \longrightarrow U \oplus W$: "proiezione su U lungo W"
  $u + w \longmapsto u$
  è lineare:

$$pr_U^W(\alpha(u_1+w_1) + \beta(u_2+w_2)) = pr_U^W(\underbrace{(\alpha u_1 + \beta u_2)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha w_1 + \beta w_2)}_{\in W}) =$$

$$= \alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha\, pr_U^W(u_1+w_1) + \beta\, pr_U^W(u_2+w_2).$$

$\mathrm{Ker}\, pr_U^W = W$, $\mathrm{Im}\, pr_U^W = U$

Es: $V = \mathcal{V}_0^2$



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$

$\overrightarrow{OP_1} = pr_U^W(\overrightarrow{OP})$

OSS:

Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è il nucleo di un'applicazione lineare. e anche l'immagine di un'applicazione lineare.

- Formula della dimensione

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{L} = \dim V$$

- Un' applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base:

~~$\mathcal{L}: V \to W$ lineare, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ base,~~

~~allora $\forall w_1, \dots, w_n \in W$~~

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \dots, w_n \in W$. Allora esiste un' unica applicazione <u>lineare</u> $\mathcal{L}: V \to W$ tale che

$$\mathcal{L}(v_1) = w_1, \dots, \mathcal{L}(v_n) = w_n.$$

Es: Determinare l'unica applicazione <u>lineare</u>

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$$

tale che

$$\mathcal{L}(1) = x-1$$

$$\mathcal{L}(x) = 1$$

$$\mathcal{L}(x^2) = 2x+3$$

Sol.:

$$\mathcal{L}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \overset{\text{linearità}}{=} a_0 \mathcal{L}(1) + a_1 \mathcal{L}(x) + a_2 \mathcal{L}(x^2)$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} a_0 (x-1) + a_1 (1) + a_2 (2x+3)$$

$$= (a_1 - a_0 + 3a_2) + (a_0 + 2a_2) x$$

Esercizio: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'unica applicazione lineare t.c.

$\mathcal{L}(1) = 1 - x + x^2$,

$\mathcal{L}(x) = -1 + x - x^2$,

$\mathcal{L}(x^2) = x + x^2$.

Determinare $\mathcal{L}$, Trovare una base per $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ e per $\operatorname{Im}\mathcal{L}$.

Sol.:

$$\mathcal{L}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 \mathcal{L}(1) + a_1 \mathcal{L}(x) + a_2 \mathcal{L}(x^2) =$$

$$= a_0 (1 - x + x^2) + a_1 (-1 + x - x^2) + a_2 (x + x^2)$$

$$= (a_0 - a_1) + (-a_0 + a_1 + a_2) x + (a_0 - a_1 + a_2) x^2$$

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{L}) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid \qquad = 0_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}} \}$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \;\middle|\; \begin{cases} a_0 - a_1 = 0 \\ -a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \text{—} \;\middle|\; \begin{matrix} a_0 = a_1 \\ a_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{ a_0 + a_0 x \mid a_0 \in \mathbb{R} \} = \langle 1 + x \rangle$

$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L} = 1$

$\mathcal{B} = \{ 1+x, 1, x^2 \}$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ che estende la base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$.

$\mathcal{B}_{\operatorname{Im}(\mathcal{L})} = \{ \mathcal{L}(1), \mathcal{L}(x^2) \} = \{ 1 - x + x^2, x + x^2 \}$

è una base di $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{L} = 2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2}}}{3} - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{L}$$

- Una funzione lineare $\mathcal{L}$ è iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{L} = \{0_V\}$.
- $\mathcal{L}: V \to W$ è suriettiva se e solo se $\operatorname{Im}\mathcal{L} = W$.

Def: Un isomorfismo lineare è una f.ne lineare

$$\mathcal{L}: V \to W$$

che è iniettiva e suriettiva. ($\overset{def}{\Leftrightarrow}$ biiettiva $\Leftrightarrow$ biunivoca)

In questo caso scriviamo

$$\mathcal{L}: V \xrightarrow{\cong} W$$

e diciamo che V e W sono isomorfi (tramite $\mathcal{L}$) e scriviamo

$$V \cong W \qquad (V \simeq W)$$

Teorema: Ogni spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$.

dim: $F_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo lineare.

$$\boxed{V \cong \mathbb{K}^n}$$

Funzioni composte

Date due funzioni

$$f : X \longrightarrow Y \qquad g : Y \longrightarrow Z$$

definiamo la funzione composta

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

come

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Il simbolo $\circ$ si legge "composto" o "dopo"

$$g \circ f = \text{"}g \text{ composta } f\text{"} = \text{"}g \text{ dopo } f\text{"}$$

Es: $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 2x$: $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2\sin(x)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(2x)$$

Esercizio: La composizione è associativa
$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$.

Proposizione: La composizione di funzioni lineari è lineare.

Dimostrazione: Siano V_1, V_2, V_3 $\mathbb{K}$-sp. vettoriali. Siano

$$f_1 : V_1 \longrightarrow V_2 \quad e \quad f_2 : V_2 \longrightarrow V_3$$

due funzioni lineari. Dimostriamo che

$$f_3 = f_2 \circ f_1 : V_1 \longrightarrow V_3$$

è lineare. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall v_1, v_2 \in V_1$

$$f_3(\alpha v_1 + \beta v_2) = (f_2 \circ f_1)(\alpha v_1 + \beta v_2) \overset{\text{Def}}{=} f_2(f_1(\alpha v_1 + \beta v_2))$$

$$\underset{\substack{f_1 \text{ è} \\ \text{lineare}}}{=} f_2(\alpha f_1(v_1) + \beta f_1(v_2))$$

$$\underset{\substack{f_2 \text{ è} \\ \text{lineare}}}{=} \alpha f_2(f_1(v_1)) + \beta f_2(f_1(v_2)) = \alpha f_3(v_1) + \beta f_3(v_2).$$

$\boxtimes$

Es: $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lineare

$$1 \longmapsto 1+x$$
$$x \longmapsto 1+x-x^2$$

$\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ lineare

$$1 \longmapsto 1-x$$
$$x \longmapsto 1+x$$
$$x^2 \longmapsto 2$$

$\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1 : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$

$$\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1(a_0+a_1x)) = \mathcal{L}_2(a_0(1+x)+a_1(1+x-x^2)) =$$
$$= \mathcal{L}_2(a_0+a_1+(a_0+a_1)x - a_1x^2) =$$
$$= (a_0+a_1)(1-x)+(a_0+a_1)(1+x)-2a_1$$
$$= 2a_0-2a_1+a_0x$$

Es: $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lineare

$$1 \longmapsto 1+x$$
$$x \longmapsto 1+x-x^2$$

$\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ lineare

$$1 \longmapsto 1-x$$
$$x \longmapsto 1+x$$
$$x^2 \longmapsto 2$$

$$\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

$$\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \mathcal{L}_1 \left(a_0 (1-x) + a_1 (1+x) + 2 a_2 \right)$$

$$= \mathcal{L}_1 \left(a_0 + a_1 + 2a_2 + (-a_0 + a_1) x \right) =$$

$$= (a_0 + a_1 + 2a_2)(1+x) + (-a_0 + a_1)(1+x-x^2)$$

$$= (2a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 2a_2) x - (-a_0 + a_1) x^2,$$

Inverse destre e sinistre

Def: Sia $f: X \to Y$ una funzione.

Una <u>inversa destra</u> di f è una funzione

$$X \leftarrow Y : g$$

tale che $\boxed{f \circ g = Id_Y}$

$$f \circ g : Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$$

Una <u>inversa sinistra</u> di f è una funzione

$$X \leftarrow Y : g$$

tale che $\boxed{g \circ f = Id_X}$

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$$

OSS1: Se $f: X \to Y$ ammette un'inversa destra $g: Y \to X$ t.c. $f \circ g: Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y = Id_Y$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "Id_Y"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

allora

f è suriettiva.

Infatti: $\forall y \in Y$, $y = Id_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$

OSS2: Se $f: X \to Y$ ammette un'inversa sinistra $g: Y \to X$ t.c. $g \circ f = Id_X : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "Id_X"'] & Y \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

allora

f è iniettiva.

Infatti: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$.

<u>Def</u>: Una <u>inversa</u> di $f: X \to Y$ è una funzione $g: Y \to X$ t.c.

$$g \circ f = Id_X \quad e \quad f \circ g = Id_Y .$$

(ovvero inversa = inversa destra e inversa sinistra)

<u>OSS</u>: Se un'inversa esiste è unica e si denota con f^{-1}.

Siano g e h due inverse di f. Allora

$$g = g \circ Id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = Id_X \circ h = h .$$

Prop.: Una funzione $f: X \to Y$ ammette inversa se e solo se f è iniettiva e suriettiva.

Dimostrazione (esercizio).

Def: Una f.ne che ammette inversa si chiama invertibile.

Teorema:

Se $\mathcal{L}: V \longrightarrow W$ è un isomorfismo lineare, allora la sua inversa $\mathcal{L}^{-1}: W \longrightarrow V$ è lineare.

Dimostrazione:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ~~$\forall v_1, v_2 \in V$~~ $\forall w_1, w_2 \in W$

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) \underset{\uparrow}{=} \mathcal{L}^{-1}(\alpha \mathcal{L}(v_1) + \beta \mathcal{L}(v_2))$$

$\exists!\, v_1, v_2 \in V$ t.c.
$w_1 = \mathcal{L}(v_1)$, $w_2 = \mathcal{L}(v_2)$
perché $\mathcal{L}$ è
suriettiva ($\exists$)
e iniettiva ($!$)

$$\underset{\uparrow}{=} \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\alpha v_1 + \beta v_2)) =$$

$\mathcal{L}$ lineare

$$= \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \, Id_V(v_1) + \beta \, Id_V(v_2)$$

$$= \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$= \alpha \, Id_V(v_1) + \beta \, Id_V(v_2)$$

$$= \alpha \, \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L}(v_1) + \beta \, \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L}(v_2)$$

$$= \alpha \, \mathcal{L}^{-1}(w_1) + \beta \, \mathcal{L}^{-1}(w_2). \qquad \blacksquare$$

<u>Es</u>: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
La f.ne coordinate in $\mathcal{B}$

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = v$$

è un isomorfismo lineare.
La sua inversa

$$F_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

è un isomorfismo lineare.

<u>Es</u>: $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}$ è lineare.

Ammette inversa destra? No, perché non è suriettiva

Ammette inversa sinistra?

Ammette inversa? No.

$$\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{matrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ è iniettiva $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ ammette inversa sinistra:

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{t.c.} \quad \mathcal{G} \circ \mathcal{L} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{L} = \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= v_2} \Big\rangle$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathbb{R}^2 \\
e_1 & \longmapsto & v_1 & \longmapsto & e_1 \\
e_2 & \longmapsto & v_2 & \longmapsto & e_2 \\
 & & e_3 & \longmapsto & ?
\end{array}$$

Esercizio: Sia $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V e sia $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ una base di W.
Sia $\mathcal{L}: V \to W$ l'unica f.ne lineare t.c.

$$\mathcal{L}(v_1) = w_1 + w_2$$
$$\mathcal{L}(v_2) = w_1 - w_2$$
$$\mathcal{L}(v_3) = w_1$$

Trovare una base di $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}$ e di $\mathrm{Im}\,\mathcal{L}$.

Sol.: $\mathcal{L}(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3) = x_1 (w_1 + w_2) + x_2 (w_1 - w_2) + x_3 w_1$

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{L} = \{ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 ;\ x_1 - x_2 = 0 \}$$
$$= \{ x_2 v_1 + x_2 v_2 - 2x_2 v_3 \mid x_2 \in \mathbb{K} \}$$
$$= \langle v_1 + v_2 - 2v_3 \rangle \qquad \mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}} = \{ v_1 + v_2 - 2v_3 \}$$

$\mathrm{Im}\,\mathcal{L} \ni w_1 + w_2,\ w_1 - w_2 \implies \mathrm{Im}\,\mathcal{L} = W.$