Applicazioni lineari

Idea chiave:

$f : V \to W$ è lineare

allora f è determinata dalle immagini degli elementi di una base

Applicazioni lineari fra $\mathbb{K}^n$

$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ dove n, m interi (nonneg.)

f lineare

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

uso linearità di f
$$= x_1 \underset{\uparrow}{f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} + \underset{\uparrow \dots}{\dots} + x_n \underset{\uparrow}{f\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \dots, n$$

tutta l'informazione per definire f è descritta da a_{ij} (per $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, m$)

scriviamo la matrice associata:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Oss: $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) = \operatorname{Col}(A)$

Traduzione con le matrici

$$f \longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

vogliamo scrivere $\boxed{f(x)} \in \mathbb{K}^m$

Def: S_A è la moltiplicazione a sinistra con la matrice A: $S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

(Ax al posto di $f(x)$)

$$f(x) =: Ax$$

$$\| $$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =: \overset{\overset{A}{\|}}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \overset{\overset{x}{\|}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Ax è chiamata anche $S_A(x)$

$A \cdot \_ = S_A(\_)$

La conclusione è :

$$\left\{ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m ,\ f \text{ è lineare} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, mapsto] & S_B \\ A & B \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Esempio

$$f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2$$

è lineare: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ✓

$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ✓

$$f \longleftrightarrow \underset{\overset{\cap}{\mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{K})}}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^1 = f(e_1) = 1$

$A^2 = f(e_2) = 1$

Calcolare $\ker f$ e $\mathrm{Im}\, f$

$$\ker f = \ker A \qquad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, A$$

$A = (1 \quad 1)$

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : (1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{K} \right\}$$

se voglio una base, basta prendere

$x_1 = 1$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = B_{\ker A}$$

Estendo $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ a base di $\mathbb{K}^2$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\text{applico } f}\right)$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1$$

quindi (1) è base dell' $\operatorname{Im} A$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1$$

$$Ae_1 = A^1 = 1$$

Esempio

$$f: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

per associare la matrice : $\left(f(e_1) \middle| f(e_2) \middle| f(e_3) \right)$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker A = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \; Ax = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x : \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x : \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x : \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right\}$$

$x_3 = 1$ $\quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è base di $\ker A$

$$\mathrm{Im}\,A = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\underset{\substack{\| \\ 3}}{\dim \mathbb{K}^3} = \underset{\substack{\| \\ 1}}{\dim \mathrm{Ker}\,A} + \dim \mathrm{Im}\,A \quad \Rightarrow \quad \dim \mathrm{Im}\,A = 2$$

$$1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$ è una rel. dip. lin.

$$\mathrm{Im}\,A = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

In $\mathbb{K}^2$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sono una base

$f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$

$$\left.\begin{aligned} f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$ definisce un'unica funzione lineare

$$\left(f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \middle| f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) = A$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \_\ \_\ \_\ \_$$

Altre funzioni lineari

Dato $V = \mathbb{K}[x]$ e $a \in \mathbb{K}$

posso scrivere $p(x) \mapsto p(a)$

è la "valutazione in a"

È lineare!

1) $(p+q)(a) \overset{?}{=} p(a) + q(a)$

2) $(\lambda p)(a) \overset{?}{=} \lambda p(a)$

sono vere entrambe

la funzione $p(x) \mapsto p(x+1)$

è lineare per lo stesso motivo della valutaz. in a

$$p(x) \overset{f}{\longmapsto} p(x+1) - p(x) \quad \text{è lineare}$$

Es per casa: mostrare che $\forall\, p \in \mathbb{K}[x]$

$$f(f(\ldots f(p))\ldots) = 0$$

se applico f abbastanza volte

Matrici

$\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$

Def: $\mathrm{tr}\,A$ "traccia di A"

$$\mathrm{tr}\,A = a_{11} + \dots + a_{nn} \qquad \mathrm{tr}: \mathrm{Mat}_{n\times n} \to \mathbb{K}$$

es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{tr}\,A = 1+5+9$

Eserc. la traccia è lineare

Es: $C_{ij} : Mat_{n \times m}(A) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$C_{ij}(A) := a_{ij}$$

è lineare

Esempro $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$C_{22}(A) = 5$$

$$C_{31}(A) = 7$$

Trasposta

$$\mathrm{Mat}_{n \times m} \to \mathrm{Mat}_{m \times n}$$

$$A \mapsto A^t$$

$$(A^t)^j_i := A^i_j$$

Dim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}^t =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

2) $(\lambda A)^t = \lambda (A^t)$

Ancora con i polinomi:

$$p(x) \mapsto p'(x) \quad \text{è lineare}$$

in $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 0 \\ x &\mapsto 1 \cdot x^0 \\ &\vdots \\ x^n &\mapsto n x^{n-1} \end{aligned}$$

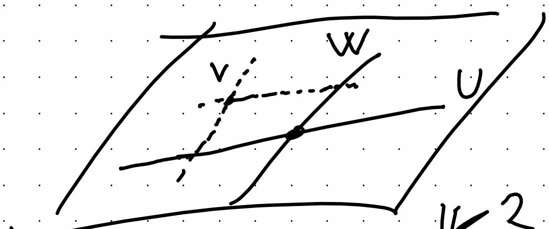
Proiezione su un sottospazio

$$V = U \oplus W$$

$v = u + w$ (u, w sono univoc. determinati da v)

$v \mapsto u \qquad u =: pr_U^W(v)$

$v \mapsto w \qquad w =: pr_W^U(v)$



$\mathbb{K}^2$

Eserc: Sia V sp. vett. con base (v_1, v_2, v_3)

$$U = \langle v_1 + 2v_2 \rangle \qquad W = \langle v_2, v_3 \rangle$$

calcolare $\mathrm{pr}_U^W(\underbrace{3v_1 + 2v_2 - v_3}_{v})$

Sol: $v = \underset{\substack{\cap \\ U}}{u} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{w}$

voglio calcolare u (non mi serve w)

$$3v_1 + 2v_2 - v_3 = (\lambda(v_1 + 2v_2)) + (\mu v_2 + \nu v_3)$$

poiché v_1, v_2, v_3 sono lin. indip. $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} v_1: \\ v_2: \\ v_3: \end{array} \begin{cases} 3 = \lambda \\ 2 = 2\lambda + \mu \\ -1 = \nu \end{cases}$

$\Rightarrow u = 3(v_1 + 2v_2)$