Associare matrici a funzioni lineari

Già l'abbiamo visto nel caso

$$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

$$\updownarrow$$

$$A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K}) \qquad A^i := f(e_i)$$

Es: Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'unica mappa lineare

t.c. $\begin{cases} f(e_1+e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(e_1+e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f(e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

se $(e_1+e_2,\ e_1+e_2+e_3,\ e_2+e_3)$ sono base di $\mathbb{R}^3$
(esercizio x casa)

$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ $\quad b_1 = e_1+e_2$

$\vdots$

$v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$ $(\exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$

$f(v) = f(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3) = \underbrace{\lambda_1 f(b_1) + \lambda_2 f(b_2) + \lambda_3 f(b_3)}_{\text{so quanto fa}}$

Nella base (b_1, b_2, b_3) di $\mathbb{R}^3$

posso associare a f la matrice $A = \left(f(b_1) \middle| f(b_2) \middle| f(b_3) \right)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Qui ho cambiato base nel dominio di f

potevo anche cambiare base nel codominio

potrei scrivere $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c_1, c_2) sono base di $\mathbb{R}^2$

ora la matrice associata a f : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$c_1 = \underset{=}{1} \cdot c_1 + \underset{=}{0} c_2$ $\quad c_2 = \underset{=}{0} c_1 + \underset{=}{1} c_2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underset{=}{-} c_1 + \underset{=}{2} c_2$

In generale:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{B_V}"'] & W \arrow[d, "F_{B_W}"] \\ \mathbb{K}^{\dim V} \arrow[r, dotted] & \mathbb{K}^{\dim W} \end{tikzcd}$$

supponiamo di fissare B_V e B_W basi

$$F_{B_W} \circ f \circ F_{B_V}^{-1} \longleftrightarrow A \in \mathrm{Mat}_{\dim W \times \dim V}(\mathbb{K})$$

con le basi standard di $\mathbb{K}^n$

- $F_{B_W} \circ f \circ F_{B_V}^{-1}$ ha una matrice associata (A)
- il diagramma è commutativo

$$F_B : U \longrightarrow \mathbb{K}^{\dim U = |B|}$$

Esempi (da giovedì)

valutazione di polinomi

$$V = \mathbb{K}[x]_{\le 2}$$

$$\nu_1 : V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$p(x) \longmapsto p(1)$$

vogliamo associare una matrice

quindi scegliamo delle basi

$$B_V = (1, x, x^2)$$

$$B_{\mathbb{K}} = (1) = (e_1)$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "F_{B_V}"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "F_{B_{\mathbb{K}}}"] \\
\mathbb{K}^3 \arrow[r, dashed] & \mathbb{K}^1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$$
$$\Big\downarrow F_{B_V}^{-1}$$
$$a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 \in \mathbb{K}[x]_{\le 2}$$
$$\Big\downarrow \nu_1$$
$$a + b + c$$
$$\Big\downarrow$$

$$(a+b+c)\cdot 1 \in \mathbb{K}$$

$$\Big\downarrow F_{B_{\mathbb{K}}}$$

$$(a+b+c)$$

$$\overbrace{F_{B_{\mathbb{K}}} \circ \varphi_1 \circ F_{B_V}^{-1}}^{f} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b+c)$$

$$A = \big(f(e_1) \,\big|\, f(e_2) \,\big|\, f(e_3) \big)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$p(x) \longmapsto p(2)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "F_{B_V}"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "F_{B_W}"] \\ \mathbb{K}^3 \arrow[r, dashed] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \xmapsto{F_{B_V}^{-1}} & a+bx+cx^2 & \longmapsto & a+2b+4c & \xmapsto{F_{B_W}} & a+2b+4c \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ \mathbb{K}^3 & & V = \mathbb{K}[x]_{\leq 2} & & \mathbb{K} & & \mathbb{K} \end{array}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Es con polinomi

$$p(x) \mapsto p(x+1)$$

$$f : V \to V$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{B_V}"'] & V \arrow[d, "F_{B_V}"] \\ \mathbb{K}^3 \arrow[r, dashed, "S_A"'] & \mathbb{K}^3 \end{tikzcd}$$

- Scegliamo delle basi

  $B_V = (1, x, x^2)$

  per dominio e codominio

- Scriviamo la composizione

$$S_A : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xmapsto{F_{B_V}^{-1}} a + bx + cx^2 \xmapsto{f} a+b+c+(b+2c)x + cx^2$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+2c \\ c \end{pmatrix}$$

$$S_A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+2c \\ c \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^1 = S_A(e_1)$$

$$A^2 = S_A(e_2)$$

$$A^3 = S_A(e_3)$$

Es trasposta

$$V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{K})$$

$$\cdot^t : V \to V$$
$$A \mapsto A^t$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\cdot^t"] \arrow[d, "F_{B_V}"'] & V \arrow[d, "F_{B_V}"] \\ \mathbb{K}^4 \arrow[r, dashed, "S_A"'] & \mathbb{K}^4 \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

- sceglamo delle basi

$$B_V = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

- Scrivo la composizione

$$S_A : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \xmapsto{F_{B_V}^{-1}} aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{t} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \xmapsto{F_{B_V}} \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comandi MATLAB:

A = sym([... ; ...])

Il comando null(A) restituisce una matrice le cui colonne sono le soluzioni-base del sistema che definisce $\operatorname{Ker} A$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \\ 3(-x_3 + x_4) + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \\ 3(-x_3 + x_4) + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + 2(-x_3 + x_4) + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{matrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Comando MATLAB per il rango.

<u>Def</u>: Data una matrice $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ il <u>rango</u> di A è per definizione la dimensione di $Im\, S_A$:

$$rK(A) = rg(A) = \dim Im(S_A) = Col(A)$$

$$Col(A) := \langle A^1, A^2, \dots, A^n \rangle \qquad S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

<u>Teorema della dimensione per le matrici</u>

$$\dim Ker(A) + rg(A) = n$$

In MATLAB: $rg(A) =: rank(A)$

Esercizio: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_2+e_3) = 2e_1 + e_2 - 2e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1 + e_2 - e_3$$

1) Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$

2) Trovare la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{B} = \{e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_2+e_3\}$ in partenza e canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ in arrivo.

3) Base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$ e di $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

Esercizio: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_2+e_3) = 2e_1+e_2-2e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1+e_2-e_3$$

1) Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$

$$A = \left(\mathcal{L}(e_1) \middle| \mathcal{L}(e_2) \middle| \mathcal{L}(e_3) \right) \in Mat_{3\times3}(\mathbb{K})$$

$$e_1 = (e_1+e_2+e_3) - (e_2+e_3)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}(e_1+e_2+e_3) - \mathcal{L}(e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_2+e_3) = 2e_1 + e_2 - 2e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1 + e_2 - e_3$$

1) Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$

$$A = \left(\mathcal{L}(e_1) \middle| \mathcal{L}(e_2) \middle| \mathcal{L}(e_3) \right) \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{K})$$

$e_2 = ?$

$$e_2 = (e_1+e_2) - e_1 \Rightarrow \mathcal{L}(e_2) = \mathcal{L}(e_1+e_2) - \mathcal{L}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio : Sia $\mathcal{L}: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_2+e_3) = 2e_1+e_2-2e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1+e_2-e_3$$

1) Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$

$$A = \left(\mathcal{L}(e_1) \middle| \mathcal{L}(e_2) \middle| \mathcal{L}(e_3) \right) \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{K})$$

$e_3 = ?$

$$e_3 = (e_1+e_2+e_3) - (e_1+e_2) \Rightarrow \mathcal{L}(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = (e_2+e_3) - e_2 \Rightarrow \mathcal{L}(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Sia $\mathcal{L}: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(e_1+e_2) = e_1 - e_3$$
$$\mathcal{L}(e_1+e_2+e_3) = 2e_1 + e_2 - 2e_3$$
$$\mathcal{L}(e_2+e_3) = e_1 + e_2 - e_3$$

1) Trovare la matrice A t.c. $\mathcal{L} = S_A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) La matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{B}$ in partenza e canonica in arrivo:

$$B = \left(F_e(\mathcal{L}(e_1+e_2)) \,\middle|\, F_e(\mathcal{L}(e_1+e_2+e_3)) \,\middle|\, F_e(\mathcal{L}(e_2+e_3)) \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$F_e : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

<u>OSS</u>: $F_e = Id_{\mathbb{K}^3}$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$