Richiami :

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$.

La matrice A definisce la funzione

$$S_A : \mathbb{K}^{n = \# \text{colonne}} \longrightarrow \mathbb{K}^{m = \# \text{righe}}$$

lineare tale che

$$S_A(e_i) = A^i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$S_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n =: AX :$$ moltiplicazione a sinistra di A per X.

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$AX = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$A_1 = (1 \ 2 \ 3)$ $A_1 X = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$

$A_2 = (4 \ 5 \ 5)$ $A_2 X = (4, 5, 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 29$

$$AX = \begin{pmatrix} A_1 X \\ A_2 X \end{pmatrix}$$

Il prodotto $A_1 X$ si chiama prodotto di una riga per una colonna.

Sia $\mathcal{L}: V \longrightarrow W$ una f.ne lineare.

Sia $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. $(\dim V = n)$

Sia $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. $(\dim W = m)$

La f.ne "coordinate nella base $\mathcal{B}_V$" è

$$F_{\mathcal{B}_V} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

$$F_{\mathcal{B}_V}^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

la funzione composta

$$F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

è lineare. Quindi esiste una matrice

$A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ tale che

$$\boxed{F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1} = S_A}$$

Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, dashed] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

La matrice

$A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ tale che

$$\boxed{F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1} = S_A}$$

si chiama la matrice associata ad $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{B}_V$ in partenza e $\mathcal{B}_W$ in arrivo..

In altre parole, A è l'unica matrice che rende il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

commutativo, i.e. $F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} = S_A \circ F_{\mathcal{B}_V}$.

Com'è fatta A ?

$$A^i = S_A(e_i) = F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(e_i)$$

$$= F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L}(v_i) = F_{\mathcal{B}_W}(\mathcal{L}(v_i))$$

$$A^i = S_A(e_i) = F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(e_i)$$

$$= F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L}(v_i) = F_{\mathcal{B}_W}(\mathcal{L}(v_i))$$

Quindi,

"la i-esima colonna di A è composta dalle coordinate di $\mathcal{L}(v_i)$ nella base di arrivo $\mathcal{B}_W$".

Es: Sia V uno sp. vett. con base $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ e W uno sp. vett. con base $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Sia $\mathcal{L} : V \to W$ l'unica f.ne lineare t.c.

$$\mathcal{L}(v_1) = w_1 - w_3 + w_4$$
$$\mathcal{L}(v_2) = 2w_1 + w_2 - w_3$$
$$\mathcal{L}(v_3) = w_1 + w_4$$

La matrice associata a $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ (in partenza) e $\mathcal{B}_W$ (in arrivo) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice associata ad una composizione di funzioni lineari: moltiplicazione righe per colonne di matrici

Caso particolare:

Siano $S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ e $S_B : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^\ell$ due funzioni lineari associate alle matrici

$$A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad \text{e} \quad B \in Mat_{\ell \times m}(\mathbb{K})$$

Consideriamo la composizione

$$S_B \circ S_A : \begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^\ell \end{tikzcd}$$

$\exists\ C \in Mat_{\ell \times n}(\mathbb{K})$ t.c. $S_B \circ S_A = S_C$.

$A \in Mat_{m \times m}(\mathbb{K})$ e $B \in Mat_{\ell \times m}(\mathbb{K})$

Consideriamo la composizione

$$S_B \circ S_A : \begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^\ell \end{tikzcd}$$

$\exists\ C \in Mat_{\ell \times m}(\mathbb{K})$ t.c. $S_B \circ S_A = S_C$.

<u>Def</u>: La matrice C t.c. $S_B \circ S_A = S_C$ si chiama il prodotto righe per colonne di B e A e si denota con

$$C = BA \quad \in Mat_{\ell \times m}(\mathbb{K})$$

$$\ell \times \cancel{m} \quad \cancel{m} \times m$$

<u>oss</u>:

Com' è fatta C ?

$$C^i = S_C(e_i) = S_B \circ S_A(e_i) = S_B(S_A(e_i)) = S_B(A^i)$$
$$= BA^i$$

$$C = BA = B(A^1 | A^2 | \cdots | A^n) = (BA^1 | BA^2 | \cdots | BA^n)$$

$$C^i_j = (BA^i)_j \underset{\uparrow}{=} B_j A^i = \sum$$

oss precedente
(riga x colonna)

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times\cancel{2}\ \cancel{2}\times 3}{C = AB} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es:

$$\begin{array}{ccc} \text{Geom} & \text{An} & \text{Dis} \\ (9, & 9, & 6) \end{array} \qquad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \\ 28 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Geom} \\ \text{An} \\ \text{Dis.} \end{array} \end{array}$$

Media: $\dfrac{1}{24}\left(9 \cdot 30 + 9 \cdot 22 + 6 \cdot 28\right)$

Comando MATLAB per la

moltiplicazione righe x colonne : *

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Il prodotto di una riga per una colonna

è una "somma pesata".

$$\underset{m\times \cancel{n}\ \cancel{n}\times e}{(AB)_i^j} = (AB^j)_i = A_i B^j = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}$$

Es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

Matrice associata alla composizione di f.ni lineari

Siano $\mathcal{L}_1 : V_2 \longrightarrow V_3$ $\quad \mathcal{L}_2 : V_1 \longrightarrow V_2$

due f.ni lineari. La composta è

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 : \begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{L}_3"'] & V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] & V_3 \end{tikzcd}$$

Fissiamo basi

$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V_1$, $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m\} \subset V_2$, $\mathcal{B}_3 = \{u_1, \dots, u_l\} \subset V_3$

e le matrici associate:

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"'] & V_3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_3}"'] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{K}^l
\end{tikzcd}
$$

$A \in Mat_{l \times m}(\mathbb{K})$, $B \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$

La matrice associata a $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ nelle basi $\mathcal{B}_1$ in partenza e $\mathcal{B}_3$ in arrivo è

$$C = AB.$$

Es: $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L}_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_3 \\ x_1+2x_3-x_2 \end{pmatrix}$$

Troviamo la matrice che rappresenta $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ nella base canonica di $\mathbb{R}^2$ (sia in partenza che in arrivo).

Sol.:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{L}_2 = S_B \qquad B = \left(\mathcal{L}_2(e_1) \,\middle|\, \mathcal{L}_2(e_2) \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_1 = S_A \qquad A = \left(\mathcal{L}_1(e_1) \,\middle|\, \mathcal{L}_1(e_2) \,\middle|\, \mathcal{L}_1(e_3) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 = S_C \quad \text{dove} \quad C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es: Sia $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice che rappresenta (="associata a") $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ in partenza e $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ in arrivo.

Sol.:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{E}} = Id_{\mathbb{R}^3}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = F_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}(F_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1))) = F_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}(v_1)) = F_{\mathcal{E}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = F_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}(F_{\mathcal{B}}^{-1}(e_2))) = F_{\mathcal{E}}(\mathcal{L}(v_2)) = F_{\mathcal{E}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es: Sia $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice che rappresenta (="associata a") $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ in partenza e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Sol.:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}
\qquad
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = F_{\mathcal{B}_2}\left(\mathcal{L}\left(F_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1)\right)\right) = F_{\mathcal{B}_2}\left(\mathcal{L}(v_1)\right) = F_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = F_{\mathcal{B}_2}\left(\mathcal{L}\left(F_{\mathcal{B}}^{-1}(e_2)\right)\right) = F_{\mathcal{B}_2}\left(\mathcal{L}(v_2)\right) = F_{\mathcal{B}_2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Domande: cosa vuol dire "determinare una funzione lineare tale che..."

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \overset{\text{base}}{\subset} V$, $\mathcal{L}: V \to W$ lineare t.c.

$$\mathcal{L}(v_1) = w_1,\ \mathcal{L}(v_2) = w_2, \dots, \mathcal{L}(v_n) = w_n.$$

Determinare $\mathcal{L}$ ~~vuol~~ vuol dire rispondere alle domande: quanto fa $\mathcal{L}(v)$, per $v \in V$?

Risposta: $\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n.$

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

Es: $\mathcal{L}: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ lineare t.c. $\mathcal{L}(1+x) = 1$

$\mathcal{L}(1-x) = 3$

$\mathcal{L}(x^2) = x$

$$\mathcal{L}\big(b_0(1-x) + b_1(1+x) + b_2 x^2\big) = 3b_0 + b_1 + b_2 x$$