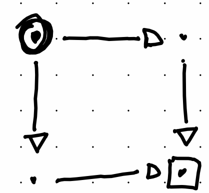
**Richiami**: Sia $L : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare.
Sia $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$ e
$\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di $W$.
La matrice che rappresenta $L$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ (in partenza) e $\mathcal{B}_W$ (in arrivo) è l'unica matrice $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ che rende il seguente diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, shift right, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] \arrow[u, shift right, bend right, "F_{\mathcal{B}_V}^{-1}"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$



**commutativo**, i.e. $S_A \circ F_{\mathcal{B}_V} = F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L}$.

$$A = \left( A^1 \middle| \dots \middle| A^n \right)$$

$$A^i = S_A(e_i) = F_{\mathcal{B}_W} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(e_i) = F_{\mathcal{B}_W}\left(\mathcal{L}(v_i)\right)$$

"La i-esima colonna di $A$ è composta dalle coordinate di $\mathcal{L}(v_i)$ nella base $\mathcal{B}_W$".

**Es:** Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
l'unica f.ne lineare t.c.

$$\mathcal{L}(1-x) = 1+x+x^2$$
$$\mathcal{L}(1+x) = 1+x$$
$$\mathcal{L}(1+x+x^2) = x^2$$
$$\mathcal{L}(1+x^2+x^3) = -1-x$$

Sia $\mathcal{B}_V = \{\underset{v_1}{1-x}, \underset{v_2}{1+x}, \underset{v_3}{1+x+x^2}, \underset{v_4}{1+x^2+x^3}\}$.
e sia $\mathcal{B}_W = \{1, x, x^2\}$.
La matrice associata a $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS. (Importante!): $A$ è utile per trovare una base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$ e di $\operatorname{Im} \mathcal{L}$: infatti:

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Ker}\mathcal{L} & \subset & V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & W & \supset & \operatorname{Im}\mathcal{L} \\ & & \downarrow F_{\mathcal{B}_V} & & \downarrow F_{\mathcal{B}_W} & & \\ \operatorname{Ker} A & \subset & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{S_A} & \mathbb{K}^m & \supset & \operatorname{Im} A \end{array}$$

$$F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(\operatorname{Ker} A) = \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) \quad , \quad F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(\operatorname{Im} A) = \operatorname{Im} \mathcal{L}.$$

(Esercizio!). In particolare,

Se $\{X_1, \dots, X_k\}$ è una base di $\operatorname{Ker} A$, allora

$\{F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X_1), \dots, F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X_k)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$.

Se $\{Y_1, \dots, Y_r\}$ è una base di $\operatorname{Im} A$, allora

$\{F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(Y_1), \dots, F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(Y_r)\}$ è una base di $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

Ho scritto che la dimensione dell'immagine di A è r perché volevo ricordare che

$$\dim \operatorname{Im} S_A = rg(A) = \underline{r}\text{ango di } A$$

$rg(A) = \#$ massimo di colonne di A linearmente indipendenti.

Es 5 (settimanali)

$$rg\, A = 1, \quad rg(B) = 2, \quad rg(C) = 2$$

Es (precedente):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ X \;\middle|\; \begin{array}{l} x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 = -x_3 \end{array} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_V = \{1 - x, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x^2 + x^3\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\alpha)} = \{-v_1 + v_2 + v_3, \; v_2 + v_4\} = \{1 + 3x + x^2, \; 2 + x + x^2 + x^3\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Col}(A) = \langle A^1, A^2, A^3, A^4 \rangle = \langle A^1, A^2 \rangle$$

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Im} \mathcal{L}} = \left\{ F_{\mathcal{B}_W}^{-1}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), F_{\mathcal{B}_W}^{-1}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\} = \left\{ 1 + x + x^2, 1 + x \right\}.$$

## Matrici associate a isomorfismi lineari: Le matrici invertibili.

$\mathcal{L}: V \to W$ è un isomorfismo lineare se e solo se

$\mathcal{L}$ è iniettivo e suriettivo (e lineare) se e solo se

$\mathcal{L}$ lineare, $\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{0_V\}$, $\operatorname{Im} \mathcal{L} = W$ se e solo se

$\mathcal{L}$ lineare, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V$ e $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ base di $W$ se e solo se

$\mathcal{L}$ lineare, $\dim V = \dim W$, $\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{0_V\}$ se e solo se

$\mathcal{L}$ lineare, $\dim V = \dim W$, $\operatorname{Im} \mathcal{L} = W$.

In questo caso l'inversa di $\mathcal{L}$ è lineare e si denota con $\mathcal{L}^{-1}$.

Caso particolare: <u>Matrici di cambiamento di base</u>

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di $V$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "\mathcal{B}_1"'] & V \arrow[d, "\mathcal{B}_2"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

La matrice $B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ che rappresenta $Id_V$ nelle basi $\mathcal{B}_1$ in partenza e $\mathcal{B}_2$ in arrivo si chiama la <u>matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_2$ alla base $\mathcal{B}_1$</u>.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "\mathcal{B}_1"'] & V \arrow[d, "\mathcal{B}_2"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Com'è fatta $B$?

$$B^i = S_B(e_i) = F_{\mathcal{B}_2} \circ Id_V \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1}(e_i) = F_{\mathcal{B}_2}(v_i)$$

"l'i-esima colonna di $B$ è composta dalle coordinate di $v_i$ nella base $\mathcal{B}_2$"

Perché si dice da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$? Perché $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots \\ & & b_{2i} & \\ & & \vdots & \\ \dots & & b_{ni} & \dots \end{pmatrix}$

$$v_i = b_{1i} w_1 + b_{2i} w_2 + \dots + b_{ni} w_n$$

**Es:** $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

basi di $\mathbb{R}^2$.

La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ è

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2} = F_{\mathcal{E}_2}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

" $=$ sta per Id. "

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ : ha per colonne proprio $v_1$ e $v_2$.

<u>OSS</u>: In $\mathbb{K}^n$ ed in $\mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$ ci sono basi "canoniche":

$$\mathcal{C} = \{ e_1, \dots, e_n \} \qquad \mathcal{C} = \{ 1, x, \dots, x^{n-1} \}.$$

Se $\mathcal{B} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ è una base di $\mathbb{K}^n$, allora la matrice di cambiamento di base <u>dalla</u> base canonica <u>a</u> $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathcal{B}"'] & \bullet \arrow[d, "\mathcal{C}"] \\
\bullet \arrow[r, "B"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

e $B = (v_1 | \dots | v_n)$.

Se $\mathcal{B} = \{ v_1 = b_{11} 1 + b_{21} x + \dots + b_{n-1,1} x^{n-1}, v_2 = b_{12} + b_{22} x + \dots + b_{n-1,2} x^{n-1}, \dots \}$ la matrice da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ è

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \end{pmatrix}$$

"ha per colonne i coefficienti dei polinomi $v_1, \dots, v_n$".

<u>Es</u>: $\mathcal{B}_1 = \{1+x,\ 1-x\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{1,\ x\} \overset{\text{basi}}{\subset} \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\mathcal{B}_1"'] & \cdot \arrow[d, "\mathcal{B}_2 = \mathcal{C}"] \\
\cdot \arrow[r, "B"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Prop.**: Sia $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice di cambiamento di base. Allora $S_B$ è invertibile. Viceversa, se $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ t.c. $S_B$ è invertibile allora $B$ è una matrice di cambiamento di base.

**dim**:

$\Rightarrow$)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Allora $\operatorname{Ker}(S_B) \simeq \operatorname{Ker} Id_V = \{0_V\}$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} S_B = 0$

$\Rightarrow S_B$ è invertibile.

$\Leftarrow$) Se $S_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è invertibile, esiste

$S_B^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ t.c. $S_B \circ S_B^{-1} = Id_{\mathbb{K}^n}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "Id_{\mathbb{K}^n}"] \arrow[d, "S_B^{-1}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "Id_{\mathbb{K}^n} = F_{\mathcal{E}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Da dimostrare $S_B^{-1}$ è una funzione coordinate in una base:

$$S_B : \begin{array}{ccc} e_1 & \longmapsto & B^1 \\ e_2 & \longmapsto & B^2 \\ \vdots & & \\ e_n & \longmapsto & B^n \end{array} \qquad S_B^{-1} : \begin{array}{ccc} B^1 & \longmapsto & e_1 \\ B^2 & \longmapsto & e_2 \\ \vdots & & \\ B^n & \longmapsto & e_n \end{array}$$

Le colonne di $B$, $\mathcal{B} = \{B^1, \dots, B^n\}$, sono una base di $\mathbb{K}^n$.
Quindi $S_B^{-1} = F_{\mathcal{B}}$. Quindi $B$ è la matrice di cambiamento di base <u>dalla</u> base canonica $\mathcal{E}$ <u>alla</u> base $\mathcal{B}$.

$\square$

Def: Una matrice $B$ t.c. $S_B$ è invertibile si dice **invertibile**.

La matrice $C$ tale che $S_B^{-1} = S_C$ si chiama l'**inversa** di $B$ e si denota con

$$B^{-1}.$$

Oss: $B$ invertibile $\Rightarrow$ $B$ è quadrata, $\operatorname{Ker} B = \{0\}$

Oss: Vale anche il viceversa!

$B$ invertibile $\Leftarrow$ $B$ è quadrata, $\operatorname{Ker} B = \{0\}$.

# Matrici associate e isomorfismi lineari

Sia $\mathcal{L}: V \longrightarrow W$ sia un isomorfismo lineare.
Sia $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$ e
sia $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base di $W$.
Sia $B$ la matrice associata a $\mathcal{L}$
nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Allora $B$ è invertibile.
Vale anche il viceversa (basta prendere $\mathcal{L} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$).

## Classificazione delle f.ni lineari.

__Def__: Diciamo che due f.ni lineari

$$\mathcal{L}_1 : V_1 \longrightarrow W_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 : V_2 \longrightarrow W_2$$

sono SIMILI se esistono isomorfismi lineari $F_1 : V_1 \xrightarrow{\simeq} V_2$ e $F_2 : W_1 \xrightarrow{\simeq} W_2$ t.c. il diagramma

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_1"', "\simeq"] & W_1 \arrow[d, "\simeq"', "F_2"] \\ V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] & W_2 \end{tikzcd}$$

commuta. In questo caso scriviamo $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$.

Esercizio : $\sim$ è una relazione di equivalenza, i.e.

$\cdot)$ $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_1$ (riflessiva)

$\cdot)$ $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \sim \mathcal{L}_1$ (simmetrica)

$\cdot)$ $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_2 \sim \mathcal{L}_3 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_3$. (Transitiva).

Teorema di classificazione

$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$ se e solo se $rg(\mathcal{L}_1) = rg(\mathcal{L}_2)$ e

$\dim V_1 = \dim V_2$, $\dim W_1 = \dim W_2$.

$rg(\mathcal{L}) := \dim \operatorname{Im}(\mathcal{L})$.

Il rango è l'unico invariante per similitudine!

**Proposizione :**

Sia $\mathcal{L} : V \to W$ un'applicazione lineare, $V, W$ f.g.
Allora esiste una base di $V$ $\mathcal{B}_V$
ed una base di $W$ $\mathcal{B}_W$ t.c.
la matrice che

(Domani)