1. Commento:
2. Domande?
3. Le matrici a scala ridotta o di Hermite.

Def: Una matrice $R \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ si dice a scala ridotta o di Hermite se

1) La prima colonna non-nulla di R è $e_1 = R^{j_1}$.
2) La prima colonna a destra di R^{j_1} che non è multiplo di e_1 è $e_2 = R^{j_2}$

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & \\
\vdots & & \vdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & 0 & 0 & & 0 & 1 & \cdots \\
 & & & & & & & & \vdots & \vdots & & & 0 & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots
\end{pmatrix}$$

$$j_1 \qquad\qquad j_2 \qquad\qquad j_3$$

3) La prima colonna a destra di R^{j_2} che non è combinazione lineare di e_1 ed e_2 è $e_3 = R^{j_3}$

e così via.

Es:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 5 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 3 & 0 & 7 & -2 & 0 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 3 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

~~Le colonne~~ $\cancel{j_1, j_2, \dots, j}$

Gli indici delle colonne $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ t.c.

$$R^{j_i} = e_i$$

t.c. $\quad R^{j_i} \notin \langle R^1, \dots, R^{j_i - 1} \rangle$ si chiamano indici <u>dominanti</u> e le colonne

$$R^{j_1} = e_1, \; R^{j_2} = e_2, \dots, R^{j_r} = e_r$$

si chiamano le colonne <u>dominanti</u> di R.

Le colonne dominanti formano una base di $\mathrm{Col}(R)$.

Gli 1 che si trovano sulle colonne dominanti si chiamano <u>1-dominanti</u>.

Sia R a scala ridotta, $m \times n$, di rango r.
Una base di

$$\operatorname{Ker} R = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid RX = 0_m \}$$

è data dalle <u>soluzioni-base</u> di $RX = 0_m$
ovvero:

Siano $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$ gli indici dominanti.
Sia $X \in \operatorname{Ker} R$. Allora

$$\boxed{x_{j_k} = - \sum_{\substack{h > j_k \\ h \text{ non} \\ \text{dominante}}} r_{kh} \, x_h} \qquad (*)$$

$k = 1, \dots, r = rg(R)$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ k \to \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
 & & & 0 & & & & & \\
 & & & \vdots & & & & & \\
 & & & 0 & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots \\
 & & & 0 & & 1 & & 0 & \cdots \\
 & & & \vdots & & & & 1 & \\
 & & & 0 & & & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j_k} \\ x_{j_{k+1}} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$j_k \qquad\qquad j_{k+1} \qquad\qquad j_{k+2}$$

Es:

$$R = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & j_1 & & & j_2 & & \\ & \downarrow & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} j_1 = 2 \\ j_2 = 5 \end{array}\right\} \text{ indici dominanti}$$

$$\operatorname{Ker} R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_6 + 6x_7 = 0 \\ x_5 + 5x_6 + 7x_7 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_2 = \overbrace{-2}^{-r_{13}} x_3 - 3x_4 - 4x_6 - 6x_7 \\ x_5 = -5x_6 - 7x_7 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_3 - 3x_4 - 4x_6 - 6x_7 \\ x_3 \\ x_4 \\ -5x_6 - 7x_7 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3, x_4, x_6, x_7 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3, x_4, x_6, x_7 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\0\\0\\-5\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-6\\0\\0\\-7\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{Soluzioni-base di } \operatorname{Ker} R.} \rangle$$

■ (Fine Esempio)

Le equazioni (*) hanno r variabili dipendendenti $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ e $(n-r)$ variabili libere che sono

$$\{x_i \mid i \notin \{j_1, \dots, j_r\}\}.$$

Per ogni $i \in [1, n] \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$ definiamo il vettore fatto così:

$$i\text{-esima componente} = 1$$

$$j\text{-esime componente} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \notin \{j_1, \dots, j_r\} \\ -r_{ki} & \text{se } j = j_k,\ k \leq i \end{cases}$$

Questo vettore si chiama la <u>soluzione-base</u> di $RX=0$ corrispondente alla variabile libera x_i.

L'insieme delle soluzioni-base di $RX=0$ forma una base di $\operatorname{Ker} R$.

Moltiplicazione a sinistra o a destra di matrici

- Moltiplicare a sinistra produce effetti sulle righe

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline A_3 \end{pmatrix}$$

$$1\times\cancel{3} \qquad \cancel{3}\times 3 \qquad = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

è una combinazione lineare delle righe.

- Moltiplicare a destra produce effetti sulle colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(A^1 \mid A^2 \mid A^3\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 A^1 + x_2 A^2 + x_3 A^3$$

è una combinazione lineare delle colonne.

Matrici elementari

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice sono

I) "scambio di due righe" "$R_i \leftrightarrow R_j$"

II) "moltiplicazione di una riga per uno scalare non-nullo"
"$R_i \mapsto \lambda R_i$" $(\lambda \neq 0)$

III) "sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga"
"$R_i \mapsto R_i + c R_j$" $(c \in \mathbb{K})$

Queste operazioni sono moltiplicazione a sinistra per certe matrici che si chiamano matrici elementari.

Matrice elementare di Tipo I :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = Y$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & \mathbb{K}^3 \arrow[r, Rightarrow, "Id_{\mathbb{K}^3}"] \arrow[d, equal, "F_e"'] & \mathbb{K}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \\
X \arrow[rrr, bend right, mapsto] & \mathbb{K}^3 \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^3 & Y = BX
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B} = \{e_2, e_1, e_3\}$$

$$Y = F_{\mathcal{B}}(X) \qquad X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$= x_2 e_2 + x_1 e_1 + x_3 e_3$$

chi è B ? $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Y = BX$

OSS:

La matrice B è la matrice ottenuta da $\mathbb{1}_3$ scambiando le prime due righe

$$\mathbb{1}_3 \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} B.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = C$$

$$C = \left(BA^1 \middle| BA^2 \middle| BA^3 \middle| BA^4 \right) = BA$$

Def: Siano $1 \le i < j \le m$. Definiamo $P_{ij}^{(m)}$ come la matrice $m \times m$ ottenuta da $\mathbb{1}_m$ scambiando la riga i con la riga j:

$$\mathbb{1}_m \underset{R_i \leftrightarrow R_j}{\rightsquigarrow} P_{ij}^{(m)}$$

NB: Spesso useremo P_{ij} invece di $P_{ij}^{(m)}$.

Es: $m=2$: $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$m=3$ $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

P_{ij} si chiama matrice elementare di tipo I.

Prop.: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$A \underset{R_i \leftrightarrow R_j}{\rightsquigarrow} P_{ij}^{(m)} A$$

dim:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "P_{ij}^{(m)} A"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

dove $\mathcal{B}$ è la base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, \overset{i}{\overset{\downarrow}{e_j}}, \dots, \overset{j}{\overset{\downarrow}{e_i}}, \dots, e_m\}$

Def: Sia $\lambda \neq 0$ uno scalare, e sia $1 \leq i \leq m$.
La matrice ottenuta da $\mathbb{1}_m$ mediante l'operazione elementare $R_i \mapsto \lambda R_i$ si denota con $D_i^{(m)}(\lambda)$

$$\mathbb{1}_m \underset{R_i \mapsto \lambda R_i}{\rightsquigarrow} D_i^{(m)}(\lambda)$$

Es:

$$D_1^{(2)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2^{(2)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$D_i^{(m)}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} & \end{array} \qquad m \times m.$$

Prop.: Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora per $\lambda \neq 0$

$$A \rightsquigarrow D_i^{(m)}(\lambda)\, A$$

$$R_i \mapsto \lambda R_i$$

"dim":

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "D_i(\lambda) A"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ e_1, \dots, e_{i-1}, \frac{1}{\lambda} e_i, e_{i+1}, \dots, e_m \right\}$$

$\blacksquare$

Def: $D_i(\lambda)$ si chiama matrice elementare di tipo II.

Def: Dati $i, j \in \{1, \dots, m\}$ e $c \in \mathbb{K}$.
la matrice che si ottiene da $\mathbb{1}_m$ mediante l' operazione elementare di Tipo III:

$$R_i \longmapsto R_i + c R_j$$

si denota con

$$F_{ij}(c)$$

Quindi

$$\mathbb{1}_m \xrightarrow[R_i \mapsto R_i + cR_j]{} F_{ij}(c)$$

Es:

$$\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 + cR_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = F_{2,1}(c)$$

$$\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \mapsto R_1 + cR_2]{} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = F_{1,2}(c)$$

<u>OSS</u>:

$$F_{i,j}(c) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & \vdots & & 0 \\ \cdots & & c & \ddots & \cdots \\ & 0 & \vdots & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathbb{1}_m + c\,E_{ij}$$

<u>Prop.</u>: Sia $A \in Mat_{m \times m}(\mathbb{K})$. Allora

$$A \underset{R_i \mapsto R_i + cR_j}{\rightsquigarrow} F_{ij}(c)\,A.$$

$F_{ij}(c)$ si chiama matrice elementare di Tipo III.

<u>OSS</u>: Le matrici elementari sono invertibili:

1) $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

2) $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$

3) $F_{ij}(c)^{-1} = F_{ij}(-c)$

" $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ "

Matrici elementari come matrici di cambiamento di base

Abbiamo già osservato che se $B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile allora B è una matrice di cambiamento di base:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, equal, "Id"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, equal, "F_e"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[d, dash, "F_{\mathcal{B}} = S_{D_i(\lambda)}"] \\
\cdot \arrow[r, dash, "D_i(\lambda)A"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

$$\mathcal{B} = \{ B^1, \dots, B^n \} \qquad F_{\mathcal{B}} = S_{B^{-1}}$$

$$S_B = F_{\mathcal{B}}^{-1}.$$