**Richiami:** Vogliamo calcolare una base di $\operatorname{Ker} A$ dove $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$.

**Idea:** Trovare una matrice $R \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ t.c.

1) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} R$
2) È facile calcolare una base di $\operatorname{Ker} R$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F_{\mathcal{B}} = S_C"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "R"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Se $\mathcal{B} = \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, \text{completata}\} \overset{\text{base}}{\subset} \mathbb{K}^m$

allora

$$R = \left( 0 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, e_1 \,\middle|\, \begin{matrix} x & \cdots & x \\ 0 & \text{—} & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \,\middle|\, \cdots \right)$$

a <u>scala ridotta</u> o di <u>Hermite</u>

Problema Trovare $C$.

**Def** (Colonne dominanti di una matrice).

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Le <u>colonne dominanti</u> di $A$ sono quelle colonne

$$A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_r}$$

t.c.

$$A^{j_k} \notin \langle A^1, \dots, A^{j_k - 1} \rangle .$$

**Es**:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{1} & 2 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{2} & 3 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{3} & 4 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Le colonne dominanti sono: $A^3, A^6, A^8$.

Una matrice <u>a scala ridotta</u> o di <u>Hermite</u> è una matrice le cui colonne dominanti sono <u>ordinatamente</u>

$$e_1, e_2, \dots, e_r.$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$ è a scala ridotta

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ non è a scala ridotta.

<u>OSS</u>: Le colonne dominanti di A formano una base di $Col(A)$.

## operazioni elementari sulle righe

I) Scambio di righe

"$R_i \longleftrightarrow R_j$"

II) Moltiplicare una riga per uno scalare $\lambda \neq 0$

"$R_i \longmapsto \lambda R_i$" $(\lambda \neq 0)$

III) Aggiungere ad una riga un multiplo di un'altra riga

"$R_i \longmapsto R_i + c R_j$" $(c \in \mathbb{K})$

## Matrici elementari

I) $\mathbb{1}_n \xrightarrow[R_i \leftrightarrow R_j]{} P_{ij}^{(n)}$

Es: $n = 2$ $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$n = \cancel{3}4$ $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

II) $\mathbb{1}_n \xrightarrow[R_i \mapsto \lambda R_i]{} D_i(\lambda)$

$n = 2$

$D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $n = \cancel{3}4$ $D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

III) $\mathbb{1}_n \xrightarrow[R_i \mapsto R_i + c R_j]{} F_{ij}(c)$

$n = 3$

$F_{23}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n = 4$

$F_{23}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le matrici elementari sono invertibili:

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$F_{ij}(c)^{-1} = F_{ij}(-c)$$

## Matrici invertibili come "funzioni coordinate in una base"

Sia $B$ una matrice invertibile $n \times n$

Sia $B^{-1} = \left( v_1 \,|\, v_2 \,|\, \ldots \,|\, v_n \right)$

Allora $S_B = F_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

$$S_B(X) = x_1 B^1 + x_2 B^2 + \ldots + x_n B^n$$

$$S_{B^{-1}}(X) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n = F_{\mathcal{B}}^{-1}(X)$$

$$\Rightarrow \quad Id_{\mathbb{K}^n} = S_B \circ S_{B^{-1}} = S_B \circ F_{\mathcal{B}}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathcal{B}} = S_B .$$

Es:

$$B = F_{12}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{12}(2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{ e_1, -2e_1 + e_2 \}$. Sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$S_B(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 + 2x_2) e_1 + x_2 e_2$$

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1 e_1 + 2x_2 e_1 - 2x_2 e_1 + x_2 e_2$$

$$= (x_1 + 2x_2) e_1 + x_2 (-2e_1 + e_2)$$

$$F_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = BX$$

**Teorema** (Algoritmo di Gauss per il calcolo del nucleo)

Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora esiste un' unica matrice a scala ridotta $R$ tale che $\exists\, C \in Mat_{m\times m}(\mathbb{K})$ invertibile t.c.

$$R = CA.$$

La matrice $C$ è prodotto di matrici elementari ed è la matrice coordinate in una base

$$\mathcal{B} = \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, \dots\}$$

di $\mathbb{K}^m$ che ha come primi $r$ elementi le colonne dominanti di $A$.

Inoltre $R$ si trova con un algoritmo di eliminazione di Gauss.

dim:

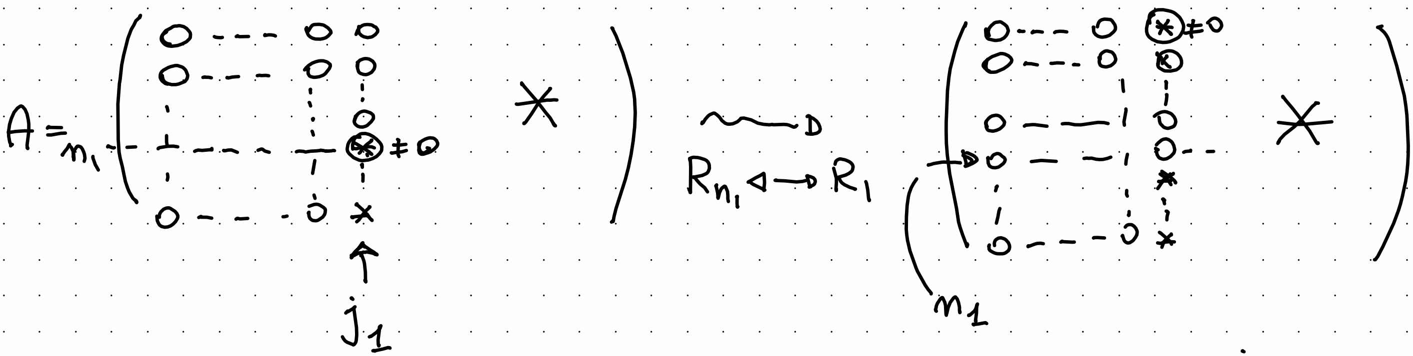
__Passo 1__: Trovare la prima colonna non-nulla di $A$
$A^{j_1}$.

Se $A=0$ allora $R=0$ è a scala ridotta.

Quindi assumiamo $A \neq 0$.

Sia $n_1$ la prima riga t.c. $A^{j_1}_{n_1} \neq 0$

Scambiare la riga $n_1$ con la prima riga:




__Passo 2__: Dividere la prima riga per $\left(A^{j_1}_{n_1}\right)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \neq 0 & \\ & & & \vdots & \\ & & & & \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \mapsto \frac{1}{*} R_1]{} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ 0 & & 0 & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & 2 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

Passo 3 :

$$R_i \longmapsto R_i - A_i^{j_1} R_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & 0 & 0 & * & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Ricomincio ... . $\blacksquare$

**Es:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Trovare rref(A), calcolare una base di Ker A, ed il rango di A.

**Sol.:**

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \quad & \uparrow & & & & \\ & j_1 = 2 & & & & \end{matrix} \end{array} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_1]{} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} = P_{12} A$$

$$\xrightarrow[R_1 \mapsto \frac{1}{2} R_1]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3/2 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} = D_1\left(\frac{1}{2}\right) P_{12}\, A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_1]{} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} = P_{12} A$$

$j_1 = 2$

$$\xrightarrow[R_1 \mapsto \frac{1}{2} R_1]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3/2 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} = D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{12} A$$

$$\xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 5R_1]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3/2 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 & -5 & -7/2 \end{pmatrix} = F_{31}(-5)\, D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{12} A$$

$j_2 = 4$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 \mapsto R_1 - \frac{3}{2} R_2 \\ R_3 \mapsto R_3 + \frac{5}{2} R_2}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} = F_{12}\left(-\tfrac{3}{2}\right) F_{32}\left(\tfrac{5}{2}\right) F_{31}(-5)\, D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{12} A$$

$j_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} = F_{12}\left(-\tfrac{3}{2}\right) F_{32}\left(\tfrac{5}{2}\right) F_{31}(-5)\, D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{12} A$$

$$j_3 = 6$$

$$\underset{R_3 \mapsto \frac{2}{3} R_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_3\left(\tfrac{2}{3}\right) \cdots$$

$$\underset{\substack{R_1 \mapsto R_1 + \frac{3}{2} R_3 \\ R_2 \mapsto R_2 - 2R_3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F_{13}\left(\tfrac{3}{2}\right) F_{23}(-2)$$

$$\parallel$$

$$R = \mathrm{rref}(A).$$

$$R = \underbrace{F_{13}\left(\tfrac{3}{2}\right) F_{23}(-2)\, D_3\left(\tfrac{2}{3}\right) F_{12}\left(-\tfrac{3}{2}\right) F_{32}\left(\tfrac{5}{2}\right) F_{31}(-5)\, D_1\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{12}}_{C} A$$

($C$ è invertibile perché prodotto di matrici invertibili)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & -1 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 2 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{aligned} x_2 + 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

colonne dominanti $2, 4, 6$

$\updownarrow$

variabili dipendenti / dominanti : $x_2, x_4, x_6$

variabili indipendenti sono $x_1, x_3, x_5$.

$$= \Bigg\langle \underbrace{\underset{\text{"}x_1=1\text{"}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\text{"}x_3=1\text{"}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\text{"}x_5=1\text{"}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{base di Ker } A} \Bigg\rangle, \quad \operatorname{rg} A = 3.$$

$= \#$ colonne dominanti.

## Calcolo del rango:

Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sia $S \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ t.c.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "F", "\simeq"'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

e di $S$ so calcolare una base di $\operatorname{Im} S$ e quindi anche il rango. Allora

$$\operatorname{Im} S = \langle \underbrace{\{ S^{j_1}, \dots, S^{j_r} \}}_{\text{base}} \rangle$$

Allora una base di $\operatorname{Im} A$ è

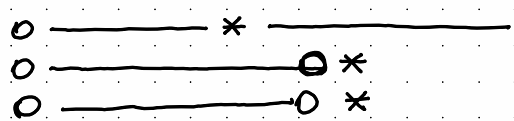
$$\{ F^{-1}(S^{j_1}), \dots, F^{-1}(S^{j_r}) \}.$$

**Def**: Sia $S \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Sia $S_i \neq 0_{1\times n}$ una riga di $S$. Allora il **pivot** della riga $S_i$ è il primo elemento non-nullo di $S_i$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

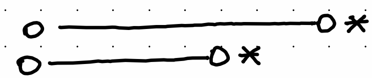
Una matrice $S \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ si dice **a scala** se

1) Il pivot di $S_i$ è alla destra ~~o nella stessa colonna~~ dei pivot delle righe $S_1, \dots, S_{i-1}$ ERRATA CORRIGE
2) Le righe nulle sono in basso.

**Es**: $S =$ 

NON a scala.

ERRATA CORRIGE



Non a scala

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

NON è scala ERRATA CORRIGE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

non a scala

Sia $S$ una matrice a scala.
Siano $S^{j_1}, S^{j_2}, \dots, S^{j_r}$ le colonne che contengono i pivot di $S$. Allora

$$j_1 \lneq j_2 \lneq \dots \lneq j_r$$

ERRATA CORRIGE

~~Assumiamo che siano distinti.~~ Allora

$$\{S^{j_1}, \dots, S^{j_r}\}$$

sono le colonne dominanti di $S$ e quindi formano una base di $Col(S)$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$j_1 = 1 \qquad j_2 = 3 \qquad j_3 = 5$

NON A SCALA

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$j_1 = 1 \qquad j_2 = 3 \qquad j_3 = 4 \qquad j_4 = 5$

A SCALA