Ricevimento 8/12

A: Ore 14:00 (No cambiamento)

$\boxed{\text{B: Ore 9:00}}$

Sondaggio ABCDE

Lezione

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

sia $s(-,-)$ un prodotto scalare su V

- ortogonalità $\quad v, u \quad$ possiamo dire che $v \perp u$
- distanze $\quad v, u \quad$ " $\quad dist(v, u)$

$S = \{ v_1, \dots, v_r \} \subseteq V$

Def: S si dice "ortogonale" se ogni coppia dei suoi vettori è una coppia ortogonale

$\forall\, i \neq j\,, \quad s(v_i, v_j) = 0 \quad$ e i $v_i \neq 0$

Lemma: se S è ortogonale allora S è indip.

Dim: $\quad w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$

supponiamo che $w = 0$

per vedere che $\lambda_1 = 0\,, \quad s(w, v_1) =$

$$s(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r, v_1) =$$

$$\lambda_1 s(v_1, v_1) + \underset{=0}{\dots} \underset{=0}{\ } + \lambda_r \underbrace{s(v_r, v_1)}_{=0} =$$

$$\lambda_1 v_1^2$$

ma sapevamo che $w = 0$

$$\lambda_1 v_1^2 = s(w, v_1) = s(0, v_1) = 0$$

dato che $v_1^2 \neq 0 \implies \lambda_1 = 0$

Quindi tutti i $\lambda_i = 0$.

Base ortogonale di V

è una base che è anche un insieme ortogonale.

Es: calcoliamo $F_{\mathcal{B}}$ per $\mathcal{B}$ ortogonale

(di solito $w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$)

e dovevamo risolvere il sistema lineare
nelle incognite λ_i

Ora invece troviamo direttamente i singoli coefficienti:

$$s(w, b_1) = s(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n, b_1)$$

$$= \lambda_1 s(b_1, b_1) + \underset{=0}{\ldots} \underset{=0}{\ldots} + \lambda_n \underbrace{s(b_n, b_1)}_{=0}$$

$$= \lambda_1 \cdot s(b_1, b_1)$$

$$\lambda_1 = \frac{s(w, b_1)}{s(b_1, b_1)} \qquad \lambda_i = \frac{s(w, b_i)}{s(b_i, b_i)}$$

$$F_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \frac{s(w, b_1)}{s(b_1, b_1)} \\ \vdots \\ \frac{s(w, b_n)}{s(b_n, b_n)} \end{pmatrix}$$

I termini $\dfrac{s(w,b_i)}{s(b_i,b_i)}$ sono detti "coefficienti di Fourier" del vettore w rispetto la base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

Es: $\mathbb{R}^2$ con $s(u,v) = u^t \cdot v$

$$\mathcal{B} = \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{b_2} \Bigg) \qquad b_1 \cdot b_2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$$

$$w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = \frac{w \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} = \frac{2x_1 + x_2}{5}$$

$$F_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Proiezione ortogonale

$$\left(\begin{array}{ll} V = U \oplus W & pr_U^W(v) = u \quad t.c. \\ v \in V & \quad v = u + \underline{w} \\ & \quad \text{con } u \in U \\ & \qquad\quad w \in W \end{array} \right)$$

(V, s) spazio vettoriale euclideo

$U \subseteq V$ ssp. vett. $\qquad W = U^\perp$

$$V = U \oplus U^\perp \qquad pr_U^{U^\perp}(v) = pr_U(v)$$

Supponiamo di avere $\mathcal{B}$ una base ortogonale di V t.c. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$

$$U = \langle b_1, \dots, b_r \rangle \qquad U^\perp = \langle b_{r+1}, \dots, b_n \rangle$$

$w \in V$ $\qquad pr_U(w)$

Sappiamo

$$w = \underbrace{\frac{s(w, b_1)}{s(b_1, b_1)} b_1 + \dots}_{\substack{\text{primi } r \\ pr_U(w)}} \underbrace{+ \frac{s(w, b_n)}{s(b_n, b_n)} b_n}_{pr_{U^\perp}(w)}$$

$$pr_U(w) = \frac{s(w,b_1)}{s(b_1,b_1)} b_1 + \dots + \frac{s(w,b_r)}{s(b_r,b_r)} b_r$$

Oss:

Se $\forall i \quad s(b_i, b_i) = 1$, i coeff. di Fourier sono più semplici: $s(w, b_i)$. $\left(\begin{array}{l}\text{La base è ortonormale} \\ \text{in questi casi}\end{array}\right)$

Esempio: $V = \mathbb{R}^n \quad s = \cdot$

$U \subseteq V$ Supponiamo di avere $U = \langle q_1, \dots, q_r \rangle$

con $(q_1, \dots, q_r)$ base ortonormale di U

$U = Col(Q) \quad Q = (q_1 | \dots | q_r)$

$$q_i \cdot q_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$Q^t \cdot Q = \mathbb{1}_r$ è la condizione su Q

per la proiezione ortogonale:

$$w = (w \cdot q_1) q_1 + \dots + (w \cdot q_r) q_r$$

$$= \underbrace{\left(q_1 \middle| \cdots \middle| q_r \right)}_{\substack{\parallel \\ Q \in Mat_{n \times r}}} \underbrace{\begin{pmatrix} w \cdot q_1 \\ \vdots \\ w \cdot q_r \end{pmatrix}}_{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^r}} = Q \underbrace{\begin{pmatrix} q_1^t \\ \hline \vdots \\ \hline q_r^t \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ Q^t}} w$$

$$w \cdot q_1 = q_1 \cdot w = q_1^t w$$

Formula per la proiezione ortog. su $Col(Q) = U$

dove $Q^t \cdot Q = \mathbb{1}$

la proiezione è $pr_U(w) = \underbrace{Q \cdot Q^t}\, w$

Es: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

non posso scrivere subito $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

perché $Q^t \cdot Q = 3 \neq 1$

scrivo $U = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad pr_U = Q \cdot Q^t = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Piccola oss:

$$\left(Q \cdot Q^t\right)^2 = Q \underbrace{Q^t Q}_{\mathbb{1}_r} Q^t = Q \, \mathbb{1} \, Q^t = Q Q^t$$

$$pr_U(w)^2 = pr_U(w)$$

Distanze

sia (V, s) uno spazio euclideo

$s(v, u)$ è pr. scalare

1 step: $s(u, u) \geq 0$ $\quad \|u\| := \sqrt{s(u,u)}$ norma di u

$\|\lambda u\| = \sqrt{s(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda^2 s(u,u)} = |\lambda| \, \|u\|$

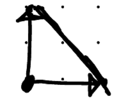
2 step: $\mathrm{dist}(v, u) := \|v - u\|$

è invariante per traslazione

$\mathrm{dist}(v,u) = 0 \iff \|v-u\| = 0 \iff v - u = 0$

$\iff v = u$

Es $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



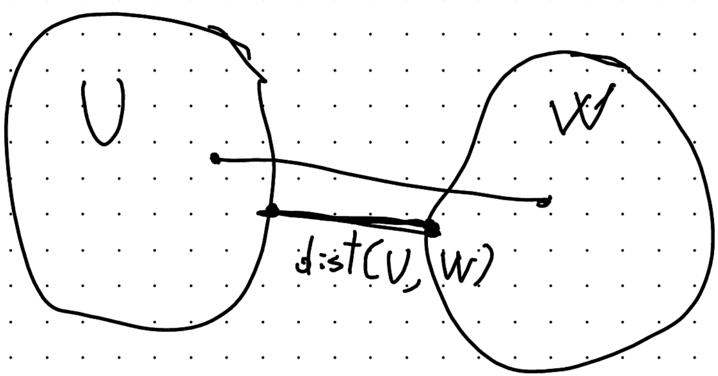
$$\operatorname{dist}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

Distanza fra sottospazi affini

(V, s) spazio euclideo

U, W sottospazi affini

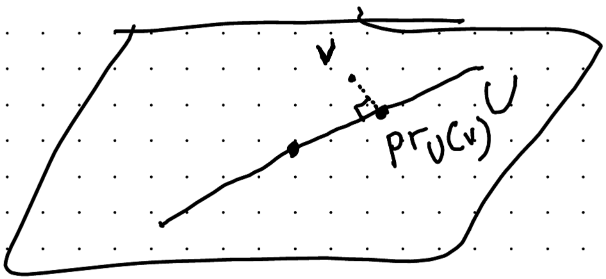
$$\operatorname{dist}(U, W) := \min_{\substack{u \in U \\ w \in W}} \operatorname{dist}(u, w)$$



Distanza fra punto e sottospazio vettoriale

(V, s) sp. euclideo $\quad v \in V$

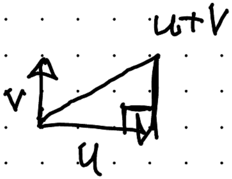
$U \subseteq V$



Teorema: la distanza fra v e U è data dalla distanza fra v e $pr_U(v)$

$$\operatorname{dist}(v, U) = \| v - pr_U(v) \|$$

Parentesi: teorema di Pitagora per spazi euclidei



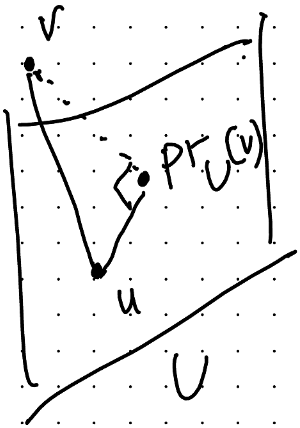
$u, v \in V$ t.c. $u \perp v$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Dim: $\|u+v\|^2 = s(u+v, u+v) =$

$= s(u,u) + s(u,v) + s(v,u) + s(v,v)$

$= \|u\|^2 + 0 + 0 + \|v\|^2$



$$\mathrm{dist}(v, U) = \min_{u \in U} \| v - u \|$$

$$\| v - u \|^2 = \| \underbrace{v - pr_U(v)}_{\in U^\perp} + \underbrace{pr_U(v) - u}_{\in U} \|^2$$

$$= \| v - pr_U(v) \|^2 + \| pr_U(v) - u \|^2$$

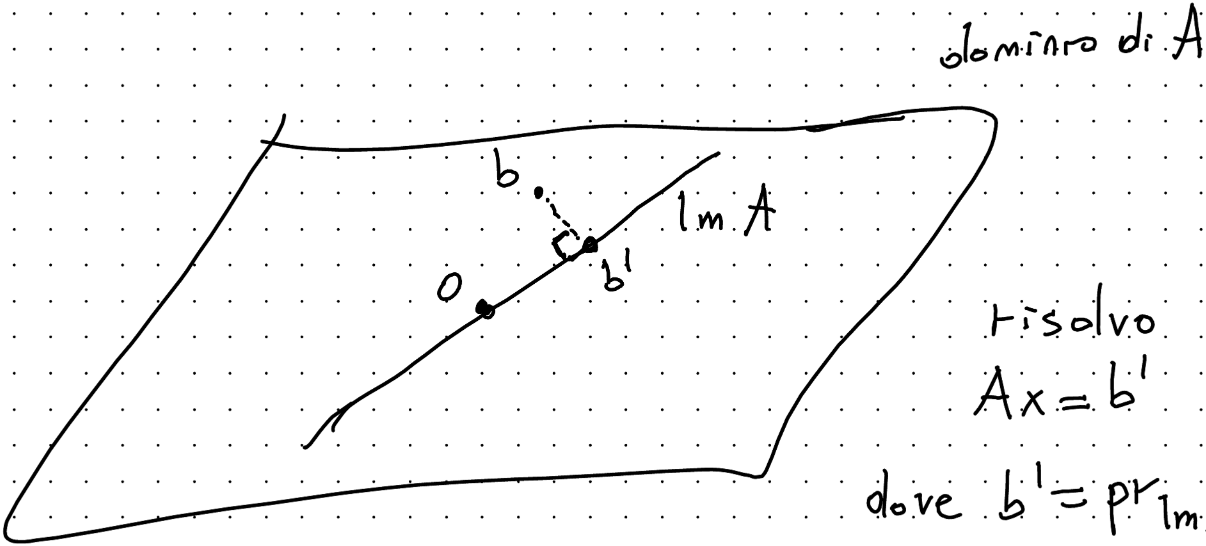
$$\geq \| v - pr_U(v) \|^2 + 0$$

e l'uguaglianza è verificata se $u = pr_U(v)$

$$\min_{u \in U} \|v-u\| = \|v - pr_U(v)\|.$$

Es: Supponiamo di avere un sistema

$$Ax = b \quad \text{non risolubile}$$



risolvo

$$Ax = b'$$

dove $b' = pr_{\mathrm{Im}A}(b)$

Per ottenere la proiezione ortogonale nel caso in cui $(V, s) = (\mathbb{R}^n, \cdot)$

abbiamo visto che se $U = \langle q_1, \dots, q_r \rangle$ ortonormali, bastava fare $Q \cdot Q^t$

Vogliamo ora sviluppare una formula generale

$U = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ base di U qualsiasi

$$A = \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_r \right) \in Mat_{n \times r}$$

$rg A = r$

Dato $v \in \mathbb{R}^n$ voglio calcolare $pr_{\operatorname{Im} A}(v)$

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} A^\perp$$

$$v = \underset{\operatorname{Im} A}{\underset{\cap}{pr_{\operatorname{Im} A}(v)}} + \underset{\operatorname{Im} A^\perp}{\underset{\cap}{\left(v - pr_{\operatorname{Im}(A)}(v)\right)}}$$

$\exists y : \quad pr_{\operatorname{Im} A}(v) = Ay$

ci serve anche che $v - Ay$ sia ortogonale a $\operatorname{Im} A$

$$\forall z, \quad Az \cdot (v - Ay) = 0$$

$$(Az)^t (v - Ay) = 0 \quad \forall z$$

$$\underbrace{z^t}\, \underbrace{A^t (v - Ay)} = 0 \quad \forall z$$

$$A^t(v - Ay) = 0$$

$$A^t v = A^t A y$$

ma siamo interessati in Ay

($A^t A$ è una matrice quadrata $r \times r$)

Parentesi

Teorema: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$

allora $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^t A$

Dim: in realtà $\ker A = \ker A^t A$

$\subseteq$ è ovvio

$\supseteq$: sia $x \in \ker A^t A$

$A^t A x = 0$ quindi: $\| A x \| = 0$

$\underbrace{x^t A^t} A x = 0$ $\iff A x = 0$

$(A x)^t A x = 0$ abbiamo scoperto

$A x \cdot A x = 0$ che $x \in \ker A$

ora teorema della dimensione:

per A: $\quad n = \dim \ker A + rg\, A$

A^tA: $\quad n = \dim \ker A^tA + rg\, A^tA$

$$rg\, A = rg\, A^tA$$

$$A^t v = A^t A y$$

ora sappiamo che A^tA è invertibile

(ricordo che avevamo scelto $\mathrm{rg} A = r$)

$$Ay = A \cdot y = A\,(A^tA)^{-1}\underbrace{(A^tA)\,y} = \underbrace{A\,(A^tA)^{-1}A^t}\,v$$

$$\shortparallel$$

$$pr_{\mathrm{Im}A}(v) = \underbrace{A\,(A^tA)^{-1}A^t}\;v$$

è la matrice di proiezione orto. su $\mathrm{Im}\,A$

Es per casa: usare questa formula generale
per ottenere la formula precedente
QQ^t

Esempio su $\mathbb{R}^3$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\,(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left((1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1\ 1\ 1)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1\ 1\ 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Disuguaglianze con le distanze

(V, s) spazio euclideo

la disuguaglianza fondamentale è

$$\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V \quad (= 0 \iff v = 0)$$

Teorema (Cauchy-Schwarz):

$u, v \in V \qquad |u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$(= \iff$ u, v sono linear. dip.$)$

Dim: $\quad u + \lambda v \quad$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

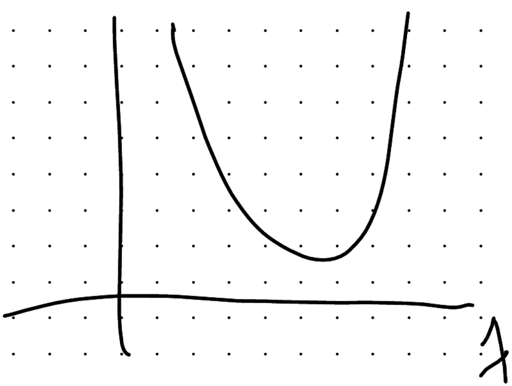
sappiamo che

$\| u + \lambda v \| \geq 0$

$$0 \leq \| u + \lambda v \|^2 = s(u + \lambda v, u + \lambda v)$$

$$= s(u, u) + \lambda s(u, v) + \lambda s(v, u) + \lambda^2 s(v, v)$$

$$= \|u\|^2 + 2\lambda s(u, v) + \lambda^2 \|v\|^2$$



(se $v = 0$ allora esercizio)

$\Delta \leq 0$

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0 \iff s(u, v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

$$s(u,v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

quindi $|s(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

e l'uguaglianza si ha solo per

$u + \lambda v = 0$ (u, v sono lin. dip.)

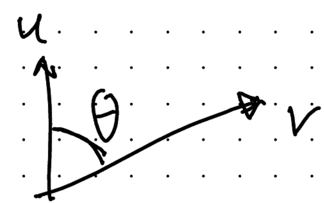
(o $v = 0$ ")

Conseguenza di C-S:

$u, v \in (V, s)$

$$f(u,v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (C-S)$$



$$-1 \leq f(u,v) \leq 1$$

$$f(u,v) = 0 \text{ se } u \perp v$$

$$f(\lambda u, v) = f(u,v) \text{ purché } \lambda > 0$$

$$\Rightarrow \exists\ \theta : f(u,v) = \cos(\theta)$$

Definiamo l'angolo fra u, v

come l'unico θ : $\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

$\theta \in [0, \pi]$