Convinzioni erronee

1) $A \Rightarrow B \neq A \Leftarrow B$

n è mult di $4 \Rightarrow n$ è pari

$\not\Leftarrow$

$AB = A \overset{?}{\Rightarrow} B = 1$ è falsa

$\Leftarrow$ è banalm. vera

2) esempi $\neq$ controesempi

assenza di prove $\neq$ prova dell'assenza

Esercizio ripreso

$$\mathcal{L}: V \longrightarrow V$$

$$\mathcal{L}(p(x)) = p(x+1) - p(x)$$

$$F: V \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

- scrivere $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{B}$ dove $\mathcal{B}$ è t.c. $F = F_{\mathcal{B}}$
- scrivere $\mathcal{L}$ nella base standard

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F"'] & V \arrow[d, "F = F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$\ker A$ riduco a scala ridotta A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ quindi $\ker \mathcal{L} = \langle 1 \rangle$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"'] & V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, dashed, "S_B"'] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{R}^4 & \mathbb{R}^4 \arrow[l, dashed, "S_B"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$

$\mathcal{B} = \_ \; \_\_ \; \_$

$\mathcal{B} = (1-x, 1+x)$

$\downarrow$

$\mathcal{C} = (1, x)$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "S_c"] \end{tikzcd}$$

era più conveniente scrivere

$\longrightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"'] & V \arrow[d, "F"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, dashed, "S_B"'] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

l'ultima risposta è $B^{-1} A B$

$$\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$$

$$B' = F(\underbrace{F_{\mathcal{C}}^{-1}(e_1)}_{1})$$

$$B' = F(1) = \begin{pmatrix} 1(-1) \\ 1(0) \\ 1(1) \\ 1(2) \end{pmatrix}$$

Cambio di base fra basi non standard

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

come faccio a calcolare il cambio di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$?

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & \mathbb{K}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{E}}"] & \mathbb{K}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{K}^2 \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{K}^2 & \mathbb{K}^2 \arrow[l, "S_B"]
\end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_A^{-1} \circ S_B = S_{A^{-1}B} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Come faccio ad estrarre un insieme di vett. lin. indip. da un insieme finito S?

$$S = \{ \overset{s_1}{1+x}, \overset{s_2}{1+x+x^2}, \overset{s_3}{1-x-x^2}, \overset{s_4}{1-x+x^2}, \overset{s_5}{2-x^2} \}$$

$$S \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

Ricondurmi a Gauss

Fisso la base standard

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^j = F_e(s_j)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & & \\ \text{ok} & \text{No} & & & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

sono colonne dominanti

Riepilogo:

1) Per calcolare una base del nucleo di $\mathcal{L}: V \to W$ lineare

•) Scegliamo opportunamente basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$ e troviamo la matrice A: che rappresenta $\mathcal{L}$ in queste basi:

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Ker}\mathcal{L} & \subset & V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & W \\ \wr\| & & \downarrow \mathcal{B}_V & & \downarrow \mathcal{B}_W \\ \operatorname{Ker}A & \subset & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

•) Troviamo $R = \operatorname{rref}(A)$ con Gauss.

•) Calcoliamo le soluzioni-base $\{X_1, \dots, X_k\}$ di $RX = 0_m$

Allora una base di $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ è

$$\{F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X_1), \dots, F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(X_k)\}.$$

2) Per calcolare $\underline{rg(\mathcal{L}) \text{ ed una base di } Im(\mathcal{L})}$, $\mathcal{L}: V \to W$ lineare

·) Scegliamo basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, .., v_n\} \subset V$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, .., w_m\} \subset W$ e troviamo la matrice A che rappresenta $\mathcal{L}$ in queste basi

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & W & \supset & Im\,\mathcal{L} \\ F_{\mathcal{B}_V}\downarrow & & \downarrow F_{\mathcal{B}_W} & & \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m & \supset & Im\,A = Col(A) \end{array}$$

·) Trovare una matrice a $\underline{\text{scala}}$ S applicando Gauss ad A: $A \rightsquigarrow S = CA$ (C invertibile)

·) Siano $j_1, .., j_r$ le colonne che contengono i pivot di S

Allora
$rg\,A = rg\,S = \#\,\text{pivot}$; $\mathcal{B}_{Col(A)} = \{A^{j_1}, .., A^{j_r}\}$ base di $Col(A)$

$\Rightarrow \mathcal{B}_{Im(\mathcal{L})} = \{F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(A^{j_1}), ..., F_{\mathcal{B}_W}^{-1}(A^{j_r})\}$ è base di $Im\,\mathcal{L}$.

3) <u>Per calcolare l'inversa</u>

•) $\mathcal{L}: V \to W$ lineare e invertibile.

•) A associata a $\mathcal{L}$ in basi opportune

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}", "\simeq"'] \arrow[d, "\mathcal{B}_V"'] & W \arrow[d, "\mathcal{B}_W"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

•) A^{-1} si trova con l'algoritmo di inversione

$$(A \mid \mathbb{1}_n) \rightsquigarrow \mathrm{rref}(A \mid \mathbb{1}_n) = (\mathbb{1}_n \mid A^{-1})$$

•) $$\mathcal{L}^{-1} = F_{\mathcal{B}_V}^{-1} \circ S_A^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_W}.$$

4) Indipendenza / Dipendenza lineare

Sia $\mathcal{T} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$

Trovare un insieme massimale di vettori lin. Ind. di $\mathcal{T}$.

- Scegliere opportunamente una base $\mathcal{B}_V$ di V.
- $F_{\mathcal{B}_V} : V \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}^n$. $F_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) = \{F_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, F_{\mathcal{B}}(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$
- Sia $A = \left(F_{\mathcal{B}}(v_1) | \dots | F_{\mathcal{B}}(v_k) \right) \in Mat_{n \times k}(\mathbb{K})$.
- $A \sim S$: scala : Troviamo le colonne dominanti

  $A^{j_1}, \dots, A^{j_k}$ di A

$\Rightarrow$ L'insieme cercato é $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_k}\}$.

5) Cambiamenti di base tra basi non standard

$V = \mathbb{K}^n$, $V = \mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$.

$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\} \overset{\text{basi}}{\subset} V$

Vogliamo trovare la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$: i.e. la matrice B t.c.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

commuta

Spezzare il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B_1"] & \mathbb{K}^n & \mathbb{K}^n \arrow[l, "B_2"']
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = B_2^{-1} B_1}$$

<u>OSS</u>: Per calcolare $B_2^{-1} B_1$

$$\left(B_2 \mid B_1\right) \rightsquigarrow \operatorname{rref}\left(\left(B_2 \mid B_1\right)\right) = \left(\mathbb{1}_n \mid B_2^{-1} B_1\right)$$

<u>Es</u>: $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{E}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice di cambio di base <u>da</u> $\mathcal{B}_2$ <u>a</u> $\mathcal{B}_1$ è $B = B_2^{-1} B_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow B = B_2^{-1} B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Notazione: Se $\mathcal{L}: V \to V$ e $\mathcal{B} \subset V$ è una base di V, la matrice associata a $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{B}$ è A t.c.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

commuta (

Il determinante

Fissiamo $n \geq 1$ e consideriamo una funzione

$$f : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

Es:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = abcd$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - c$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

Quindi f è una f.ne di n^2 variabili.

Possiamo pensare ad f come ad una funzione delle <u>righe</u>:

$$f : \underbrace{Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times \dots \times Mat_{1\times n}(\mathbb{K})}_{n \text{ volte.}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

oppure come f-ne delle colonne

$$f : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte.}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f\left((a,b), (c,d)\right) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right).$$

Def: $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice <u>alternante sulle righe</u> (o <u>anti-simmetrica sulle righe</u>) se cambia segno quando si scambiano due righe:

$$f(P_{ij}A) = -f(A)$$

Es:

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - c$ $\quad f\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = c - a$ <u>Alternante sulle righe</u>

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + c$ NON è alt. sulle righe

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - b$ NO

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$ Si

$$f\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\right) = cb - ad = -f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right).$$

OSS: Sia $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ alternante sulle righe. Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ che ~~the~~ ha due righe uguali

$$A_i = A_j \qquad (i \neq j).$$

Quanto fa $f(A)$?

$$f(A) = 0.$$

<u>Def</u>: Una funzione

$$f: Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times \dots \times Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

è <u>multi-lineare</u> sulle righe se è lineare in ogni variabile:

$$f = f(X_1, \dots, X_n)$$

$$g(z) = f(X_1, \dots, X_{i-1}, z, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$g(\alpha X_i + \beta Y_i)$$

$$f(X_1, \dots, \alpha X_i + \beta Y_i, X_{i+1}, \dots, X_n) =$$

$$= \alpha\, f(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n) + \beta\, f(X_1, \dots, X_{i-1}, Y_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$\forall i = 1, \dots, n$.

OSS (Importante):

Una f.ne $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ alternante e multilineare sulle righe se e solo se

$$f(P_{ij}A) = -f(A)$$

$$f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall i = 1, \dots, n$$

$$f(F_{ij}(c)A) = f(A)$$

Teorema: Esiste un'unica f.ne

$$f : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

tale che

$$f(P_{ij}A) = -f(A) \qquad \forall\, i \neq j \quad \forall A$$

$$f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A) \qquad \forall\, i,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall A$$

$$f(F_{ij}(c)A) = f(A) \qquad \forall i,j,\ c \in \mathbb{K},\ \forall A$$

ovvero t.c. f è alternante e multilineare sulle righe e tale che

$$f(\mathbb{1}_n) = 1.$$

Tale funzione si chiama <u>determinante</u> e si denota con det.