

Convinzioni erranee

1) $A \Rightarrow B \not\equiv A \Leftarrow B$

n è mult di 4 \Rightarrow n è pari

~~\Leftarrow~~

$AB=A \stackrel{?}{\Rightarrow} B=\underline{1}$ è falsa
 \Leftarrow è banalm. vera

2) esempi \neq controesempi

assenza di prove \neq prova dell'assenza

Esercizio ripreso

$$\mathcal{L}: V \longrightarrow V$$

$$\mathcal{L}(p(x)) = p(x+1) - p(x)$$

$$F: V \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

- scrivere \mathcal{L} nella base \mathcal{B}
dove \mathcal{B} è t.c. $F = F_{\mathcal{B}}$
- scrivere \mathcal{L} nella base standard

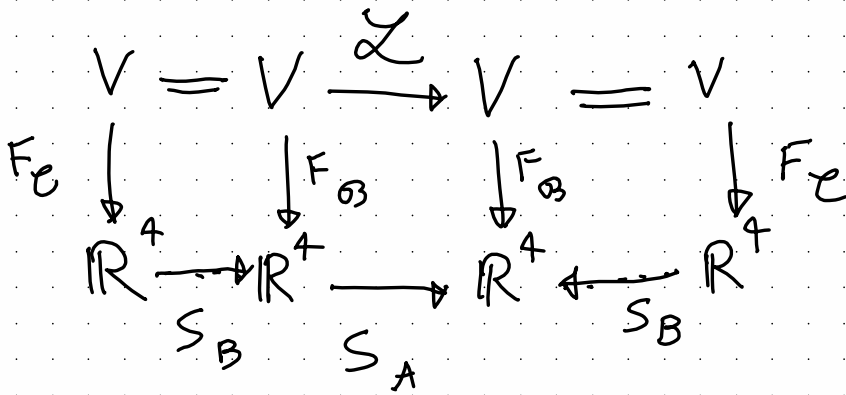
$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & V \\
 \downarrow F & & \downarrow F = F_B \\
 \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{S_A} & \mathbb{R}^4
 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

ker A riduco a scala ridotta A

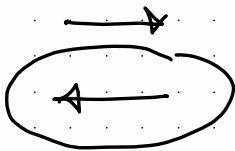
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{quindi: } \ker \mathcal{L} = \langle 1 \rangle$$



$$\mathcal{L} = (1, x, x^2, x^3)$$

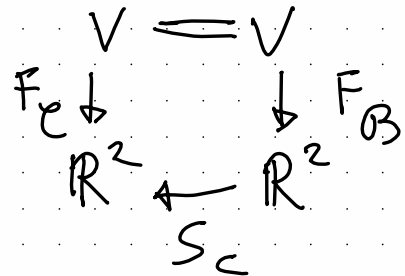
$$B = \dots$$



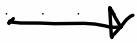
$$B = (1-x, 1+x)$$

$$\downarrow \mathcal{L} = (1, x)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



era più conveniente scrivere



$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

l'ultima risposta è $B^{-1} A B$

$$B^i = F \left(\underbrace{F_{\mathcal{L}}^{-1}(e_i)}_1 \right)$$

$$B^i = F(1) = \begin{pmatrix} 1(-1) \\ 1(0) \\ 1(1) \\ 1(2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} V & = & V \\ F_{\mathcal{L}} \downarrow & & \downarrow F \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\quad S_B \quad} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = (1, x, x^2, x^3)$$

Cambio di base fra basi non standard

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

come faccio a calcolare il cambio di base

da \mathcal{B}_2 a \mathcal{B}_1 ?

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}^2 & = & \mathbb{K}^2 & = & \mathbb{K}^2 \\ \downarrow F_{\mathcal{B}_1} & & \downarrow F_{\mathcal{C}} & & \downarrow F_{\mathcal{B}_2} \\ \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{S_A} & \mathbb{K}^2 & \xleftarrow{S_B} & \mathbb{K}^2 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_A^{-1} \circ S_B = S_{A^{-1}B}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Come faccio ad estrarre un insieme di vett.

lin. indep. da un insieme finito S ?

$$S = \left\{ \overset{s_1}{1+x}, \overset{s_2}{1+x+x^2}, \overset{s_3}{1-x-x^2}, \overset{s_4}{1-x+x^2}, \overset{s_5}{2-x^2} \right\}$$

$$S \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

Ricondurm. a Gauss

Fisso la base standard

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^j = F_e(s_j)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
ok No

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

↑
sono colonne dominanti:

Riepilogo:

1) Per calcolare una base del nucleo di $\mathcal{L}: V \rightarrow W$ lineare

•) Scegliamo opportunamente basi $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$
e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$ e troviamo la matrice A :
che rappresenta \mathcal{L} in queste basi:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } \mathcal{L} \subset V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & W \\ \cong \downarrow \mathcal{B}_V & & \downarrow \mathcal{B}_W \\ \text{Ker } A \subset \mathbb{K}^m & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

•) Troviamo $R = \text{rref}(A)$ con Gauss .

•) Calcoliamo le soluzioni-base $\{x_1, \dots, x_k\}$ di $Rx = 0_m$

Allora una base di $\text{Ker } \mathcal{L}$ è

$$\{F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(x_1), \dots, F_{\mathcal{B}_V}^{-1}(x_k)\}.$$

2) Per calcolare $\text{rg}(\alpha)$ ed una base di $\text{Im}(\alpha)$,
 $\alpha: V \rightarrow W$ lineare

•) Scegliamo basi $B_V = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ e $B_W = \{w_1, \dots, w_n\} \subset W$
 e troviamo la matrice A che rappresenta α in
 queste basi

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & W \supset \text{Im } \alpha \\ \downarrow F_{B_V} & & \downarrow F_{B_W} \\ \mathbb{K}^m & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \supset \text{Im } A = \text{Col}(A) \end{array}$$

•) Trovare una matrice a scala S applicando
 Gauss ed A : $A \rightsquigarrow S = CA$ (C invertibile)

•) Siano j_1, \dots, j_r le colonne che contengono i pivot di S

Allora

$$\text{rg } A = \text{rg } S = \# \text{ pivot}; \quad B_{\text{Col}(A)} = \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\} \text{ base di } \text{Col}(A)$$

$$\Rightarrow B_{\text{Im}(\alpha)} = \{F_{B_W}^{-1}(A^{j_1}), \dots, F_{B_W}^{-1}(A^{j_r})\} \text{ è base di } \text{Im } \alpha.$$

3) Per calcolare l'inversa

•) $\mathcal{L}: V \rightarrow W$ lineare e invertibile.

•) A associata a \mathcal{L} in basi opportune

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & W \\ \beta_V \downarrow & \cong & \downarrow \beta_W \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

•) A^{-1} si trova con l'algoritmo di inversione

$$(A | \mathbb{1}_m) \rightsquigarrow \text{ref} (A | \mathbb{1}_n) = (\mathbb{1}_n | A^{-1})$$

$$\mathcal{L}^{-1} = F_{\beta_W}^{-1} \circ S_A^{-1} \circ F_{\beta_V}$$

4) Indipendenza / Dipendenza lineare

Sia $\mathcal{Z} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$

Trovare un insieme massimale di vettori lin. Ind. di \mathcal{Z} .

• Scegliere opportunamente una base \mathcal{B}_V di V .

• $F_{\mathcal{B}_V}: V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^m$. $F_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z}) = \{F_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, F_{\mathcal{B}}(v_k)\} \subset \mathbb{K}^m$

• Sia $A = (F_{\mathcal{B}}(v_1) | \dots | F_{\mathcal{B}}(v_k)) \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{K})$.

• $A \sim S$: scala: Troviamo le colonne dominanti

A^{j_1}, \dots, A^{j_k} di A

\Rightarrow L'insieme cercato è $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_k}\}$.

5) Cambiamenti di base Tra basi non standard

$$V = \mathbb{K}^m, \quad V = \mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$$

$$\beta_1 = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad \beta_2 = \{w_1, \dots, w_m\} \text{ basi } \subset V$$

Vogliamo trovare la matrice di cambiamento di base da β_2 a β_1 : i.e. la matrice B t.c.

$$\begin{array}{ccc} V & = & V \\ \downarrow F_{\beta_1} & & \downarrow F_{\beta_2} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{K}^n \end{array} \quad \text{commuta}$$

Spezzare il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} V & = & V & = & V \\ \downarrow F_{\beta_1} & & \downarrow F_e & & \downarrow F_{\beta_2} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{B_1} & \mathbb{K}^n & \xleftarrow{B_2} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = B_2^{-1} B_1}$$

Oss: Per calcolare $B_2^{-1}B_1$

$$(B_2 | B_1) \rightsquigarrow \text{rref}((B_2 | B_1)) = (I_n | B_2^{-1}B_1)$$

Es: $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & = & \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \\ \downarrow F_{B_1} & & \downarrow F_C & \downarrow F_{B_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{=} & \mathbb{R}^2 & \xleftarrow{=} & \mathbb{R}^2 \\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & & B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & & \end{array}$$

La matrice di
cambio di base
da B_2 a B_1
è $B = B_2^{-1}B_1$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right) = B = B_2^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notazione : Se $\alpha: V \rightarrow V$ e $B \subset V$ è una base di V , la matrice associata a α nella base B è A t.c.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & V \\ F_B \downarrow & & \downarrow F_B \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

commute (

Il determinante

Fissiamo $n \geq 1$ e consideriamo una funzione

$$f: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

Es:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = abcd$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - c$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

Quindi f è una f.ne di n^2 variabili.

Possiamo pensare ad f come ad una funzione delle righe:

$$f: \underbrace{\text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K}) \times \text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K})}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

oppure come f-me delle colonne

$$f: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f\left((a, b), (c, d)\right) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right).$$

Def: $f: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ si dice
alternante sulle righe (σ anti-simmetrica sulle righe)
se cambia segno quando si scambiano
due righe:

$$f(P_{ij} A) = -f(A)$$

Es: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - c$ $f\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\right) = c - a$ Alternante sulle righe
 $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\right) = a + c$ NON è alt. sulle righe
 $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - b$ NO
 $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$ SÌ

$$f\left(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\right) = cb - ad = -f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

OSS: Sia $f: \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ alternante
sulle righe. Sia $A \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{K})$ che
ha due righe uguali

$$A_i = A_j \quad (i \neq j).$$

Quanto fa $f(A)$?

$$f(A) = 0.$$

Def: Una funzione

$$f: \text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K}) \times \dots \times \text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

è multi-lineare sulle righe se è lineare in ogni variabile:

$$f = f(X_1, \dots, X_m)$$

$$g(z) = f(X_1, \dots, X_{i-1}, z, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$= g(\alpha X_i + \beta Y_i)$$

$$f(X_1, \dots, \alpha X_i + \beta Y_i, X_{i+1}, \dots, X_n) =$$

$$= \alpha f(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n) + \beta f(X_1, \dots, X_{i-1}, Y_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$\forall i = 1, \dots, m.$$

OSS (Importante):

Una f.ne $f: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ alternante
e multilineare sulle righe se e solo se

$$f(P_{ij} A) = -f(A)$$

$$f(D_i(\lambda) A) = \lambda f(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall i=1, \dots, n$$

$$f(F_{ij}(c) A) = f(A)$$

Teorema: Esiste un'unica f. me

$$f: \text{Mat}_{m \times m}(K) \rightarrow K$$

tale che

$$f(P_{ij} A) = -f(A) \quad \forall i \neq j \quad \forall A$$

$$f(D_i(\lambda) A) = \lambda f(A) \quad \forall \lambda \in K \quad \forall A$$

$$f(F_{ij}(c) A) = f(A) \quad \forall c \in K, \forall A$$

ovvero t.c. f è alternante e multilineare sulle righe
e tale che

$$f(I_m) = 1.$$

Tale funzione si chiama determinante
e si denota con \det .