Richiami: Una funzione $f: Mat_{m\times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice alternante (o anti-simmetrica) sulle righe se

1) $f(P_{ij}A) = -f(A) \quad \forall A \in Mat_{m\times m}(\mathbb{K})$

Una f.ne alternante $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice multilineare se

2) $f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall i = 1, \dots, m$

3) $f(F_{ij}(c)A) = f(A) \quad \forall c \in \mathbb{K}, \ \forall i,j = 1, \dots, m$

$\forall A \in Mat_{m\times m}(\mathbb{K})$.

2), 3) $\Longleftrightarrow$ $f(A) = f(A_1, A_2, \dots, A_m)$. f è lineare in (1) ognuna delle variabili, i.e. $\forall i = 1, \dots, m$ la funzione $f_i(A_i) = f(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$

$f_i:$

$$f_i : \underbrace{\mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{K})}_{\text{sp. vett.}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{K}}_{\text{sp. vett.}} \quad \text{è lineare}$$

$$f_i(\alpha A_i + \beta B_i) = \alpha f_i(A_i) + \beta f_i(B_i)$$

ovvero

$$f(A_1, \dots, A_{i-1}, \alpha A_i + \beta B_i, A_{i+1}, \dots, A_n) =$$

$$= \alpha\, f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n) + \beta\, f(A_1, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

<u>Es</u>: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a$ non è alternante ~~ma~~ e **non** è multilineare sulle righe:

$$f((a,b),(c,d)) = a$$

$$f(\alpha(a,b) + \beta(a',b'), (c,d)) = f((\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b'), (c,d))$$

$$= \alpha a + \beta a' \overset{?}{=} \alpha\, f((a,b),(c,d)) + \beta\, f((a',b'),(c,d))$$

<u>Es</u>: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a$ non è alternante ~~ma~~ e non è multilineare sulle righe:

$$f((a,b),(c,d)) = a$$

$$f(\alpha(a,b)+\beta(a',b'),(c,d)) = f((\alpha a+\beta a', \alpha b+\beta b'),(c,d))$$

$$= \alpha a+\beta a' \overset{?}{=} \alpha f((a,b),(c,d)) + \beta f((a',b'),(c,d))$$

<u>vero</u> $\Rightarrow$ f è lineare sulla prima riga.

$$f((a,b), \alpha(c,d)+\beta(c',d')) = a \underset{(*)}{\overset{?}{=}} \alpha f((a,b),(c,d)) + \beta f((a,b),(c',d'))$$

$$\alpha f((a,b),(c,d)) + \beta f((a,b),(c',d')) = \alpha a + \beta a = (\alpha+\beta) a$$

$(*)$ è FALSA! quindi f non è multilineare sulle righe.

Teorema: **Esiste** un'**unica** funzione
$f: Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ t.c.

1) $f(P_{ij} A) = -f(A)$ "alternante"

2) $f(D_i(\lambda) A) = \lambda f(A)$

3) $f(F_{ij}(\lambda) A) = f(A)$

"alternante e multilineare"

4) $f(\mathbb{1}_n) = 1$

Questa f.ne f si chiama **determinante** $(n \times n)$
e si denota con $\det^{(n)}$.

dim: **Esistenza**: la vediamo dopo.
Se tale f esiste facciamo vedere che è unica:

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Quanto fa $f(A)$?

$$A \rightsquigarrow E_1 A \rightsquigarrow E_2 \underbrace{E_1 A} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathrm{rref}(A) = R$$

dove $E_1, \dots, E_k$ sono opportune matrici elementari che possiamo trovare applicando l'algoritmo di Gauss.

$$\Rightarrow \quad A = (E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1)^{-1} R$$

Dato che f è alternante e multilineare sappiamo calcolare $f(EB)$ $\forall$ matrice el. E, $\forall B$. Inoltre, l'inversa di una matrice elementare è una matrice elementare

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} R$$

$\Rightarrow \quad f(A) = c\, f(R)$ dove c è un opportuno scalare.

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} R$$

$\Rightarrow \quad f(A) = c\, f(R)$ dove c è un opportuno scalare.

<u>*Es*</u>:

$$A = P_{ij}\, D_i(2)\, F_{kl}(3)\, D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, \mathbb{1}_n$$

$$
\begin{aligned}
f(A) &= f\left(P_{ij}\, D_i(2)\, F_{kl}(3)\, D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, \mathbb{1}_n\right) \\
&= -f\left(D_i(2)\, F_{kl}(3)\, D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, \mathbb{1}_n\right) \\
&= -2\, f\left(F_{kl}(3)\, D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, \mathbb{1}_n\right) \\
&= -2\, f\left(D_j(-4)\, F_{hk}(100)\, \mathbb{1}_n\right) \\
&= 8\, f\left(F_{hk}(100)\, \mathbb{1}_n\right) \\
&= \underset{\overset{\shortparallel}{c}}{8}\, f(\mathbb{1}_n) = 8
\end{aligned}
$$

Due possibilità per la matrice a scala ridotta $R \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$

1) R ha l'ultima riga nulla

2) $R = \mathbb{1}_n$

Quindi

$$f(R) = \begin{cases} 0 & \text{se } R \text{ ha una riga nulla (perché } f \text{ è multilineare)} \\ 1 & \text{se } R = \mathbb{1}_n \text{ (per ipotesi)} \end{cases}$$

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } rg(A) < n \\ c & \text{se } rg(A) = n \end{cases}$$

Sia g un'altra f.ne con le proprietà 1), 2), 3), 4) allora

$$g(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } rg(A) < n \\ c & \text{se } rg(A) = n \end{cases} \Rightarrow g(A) = f(A) \quad \forall A.$$

$\Rightarrow f$ è unica. ∎

<u>Es</u>: $n = 1$.

1) $f: Mat_{1\times 1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

lineare e $f(1) = 1$. Quindi $f = Id_{\mathbb{K}}$, $f(x) = x \;\; \forall x \in \mathbb{K}$.

$$\det^{(1)} = Id_{\mathbb{K}}.$$

2) $n = 2$:

$$\det^{(2)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{se } ad-bc=0 \\ ? & \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rref}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff ad-bc \neq 0$$

$$\det^{(2)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \det^{2}\big((a,b),\ (c,d)\big)$$

$$= \det^{(2)}\big(a(1,0)+b(0,1),\ (c,d)\big)$$

$$= a \det^{(2)}\big((1,0),\ (c,d)\big) + b \det^{(2)}\big((0,1),\ (c,d)\big)$$

lineare nella prima riga

$$= a \det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + b \det^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= a \det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + b \det^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

operazione di Tipo III

$$= ad \det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bc \det^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tipo II

$$= ad - bc \det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad - bc$$

<u>Prop</u>: Il determinante 2×2 esiste ed è

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$$

<u>dim</u>: Questa funzione è alternante, multilineare e vale 1 su $\mathbb{1}_2$. ☒

<u>Es</u>:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

La formula dice $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 3 - 1\cdot 2 = 1$.

$$\det\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & \underbrace{1-i(1+i)=}_{2-i} \end{pmatrix}$$

$$= -(2-i)\det\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -(2-i)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = i-2$$

La formula dice $\det\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = i(1+i)-1 = i-2$. ✓

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

det è alternante.

<u>COR</u>: Data $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

$\det(A) \neq 0 \iff rg\, A = n \iff \operatorname{Ker} A = \{0_n\} \iff A$ è invertibile.

Prop.: Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ a scala. Allora

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

dim: $rg(A) = \#$ pivot di A.

Quindi $rg(A) = n \iff$ i pivot di A sono sulla diagonale

$$\left(A = \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} p_1 & * & * \\ 0 & p_2 & * \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \right).$$

Quindi se $rg(A) < n$ $\exists\, i : a_{ii} = 0$. e quindi

$$\det(A) = 0 = a_{11}\cdots a_{ii}\cdots a_{nn}.$$

Se $rg(A) = n$ e quindi $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$

possiamo dividere ogni riga di A per il suo pivot:

$$A \rightsquigarrow D_1\left(\tfrac{1}{a_{11}}\right) D_2\left(\tfrac{1}{a_{22}}\right)\cdots D_n\left(\tfrac{1}{a_{nn}}\right) A = U$$

$$A \rightsquigarrow D_1\left(\frac{1}{a_{11}}\right) D_2\left(\frac{1}{a_{22}}\right) \cdots D_n\left(\frac{1}{a_{nn}}\right) A = U$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow U = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = D_n(a_{nn})\, D_{n-1}(a_{n-1,n-1}) \cdots D(a_{22})\, D(a_{11})\, U$$

$$\Rightarrow \det(A) = a_{nn}\, a_{n-1\,n-1} \cdots a_{22}\, a_{11} \det(U)$$

$\det(U) = 1$ perché U può essere trasformata in $\mathbb{1}_n$ utilizzando solo operazioni elementari di tipo III.

$$\Rightarrow \det A = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

$\boxtimes$

Es:

- $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\3&-1&1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&-4&-2\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-4&-2\end{pmatrix}$

$$= -\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&6\end{pmatrix} = -6$$

- $\det\begin{pmatrix}1-i&i&1+i\\3-2i&3i&8+2i\\2-2i&2i&4+3i\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1-i&i&1+i\\1&i&4-i\\2-2i&2i&4+3i\end{pmatrix}$

$$= -\det\begin{pmatrix}1&i&4-i\\1-i&i&1+i\\2-2i&2i&4+3i\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1&i&4-i\\0&-1&-2+6i\\0&-2&-2+13i\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix}1&i&4-i\\0&1&2-6i\\0&-2&-2+13i\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&i&4-i\\0&1&2-6i\\0&0&2+i\end{pmatrix} = 2+i.$$

Comando MAT: \`det'.

- $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 26 & 26 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\det^{(n)}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sg(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

dove $S_n = \{ \sigma : [1,n] \longrightarrow [1,n]$ biiezioni $\}$.

$n = 2$:

$$\sigma = id \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 \end{matrix} \qquad\qquad \sigma \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underset{a_{11}}{\underset{\parallel}{a_{1\sigma(1)}}} \underset{a_{22}}{a_{2\sigma(2)}} - a_{12} a_{21}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \odot \\ \odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \odot & \cdot \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \odot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \odot \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \odot & - \\ - & - & \odot \\ \odot & - & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$