Sia $f: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ t.c.

1) $f(P_{ij}A) = -f(A)$

2) $f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A)$

3) $f(F_{ij}(c)A) = f(A)$

4) $f(\mathbb{1}_n) = 1$.

Se una tale f esiste è unica e si chiama determinante:

$$A \rightsquigarrow E_1 A \longrightarrow \dots \rightsquigarrow E_k \cdots E_1 A = R = \mathrm{rref}(A).$$

$A = F_1 \cdots F_k R$ dove $F_i = E_i^{-1}$ è una matrice elementare

e quindi $f(A) = c\, f(R)$ dove c è ~~la cost~~ lo scalare:

$$f(P_{ij}) = f(P_{ij}\,\mathbb{1}_n) = -f(\mathbb{1}_n) = -1$$

$$f(D_i(\lambda)) = f(D_i(\lambda)\,\mathbb{1}_n) = \lambda\, f(\mathbb{1}_n) = \lambda$$

$$f(F_{ij}(c)) = f(F_{ij}(c)\,\mathbb{1}_n) = f(\mathbb{1}_n) = 1$$

$$f(R) = \begin{cases} 0 & \text{se } R \text{ ha l'ultima riga nulla} \\ 1 & \text{se } R = \mathbb{1}_n \end{cases}$$

$$A \xrightarrow[c=7]{} R \xleftarrow[c=8]{} A$$

se fosse così f non esisterebbe.

Teorema: (di **Binet o del prodotto**)

Siano $A, B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

dim:

oss: AB è invertibile $\Leftrightarrow$ A e B sono invertibili.

Quindi

$$\det(AB) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \text{ oppure } \det(B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(A)\det(B) = 0.$$

Supponiamo che $\underline{A}$ e $\underline{B}$ siano entrambe invertibili (e quindi $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$).

Dim. 1: (con le matrici elementari)

A invertibile $\Rightarrow$ $\exists$ matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ t.c.

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k$$

B invertibile $\Rightarrow$ $\exists$ matrici elementari $F_1, \dots, F_t$ t.c.

$$B = F_1 F_2 \cdots F_t.$$

Quindi

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdots E_k F_1 F_2 \cdots F_t)$$
$$= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\det(F_1)\cdots\det(F_t)$$
$$= \det(E_1 \cdots E_k)\det(F_1 \cdots F_t) = \det A \det B \quad \blacksquare$$

$\det(EA) = \det(E)\det(A)$
$\forall E$ elementare
$\forall A$.

<u>Dim 2</u> (uso l'unicità): Consideriamo la f.ne

$$f : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

definita come

$$f(X) = \frac{\det(XB)}{\det(B)}$$

è ben-definita poiché $\det(B)\neq 0$. Dimostriamo che

$$f(A) = \det(A). \quad (*)$$

Per farlo basta verificare che f soddisfa le ~~4~~ proprietà di det:

1) $f(P_{ij}X) = \dfrac{\det(P_{ij}XB)}{\det(B)} = -\dfrac{\det(XB)}{\det(B)} = -f(X)$

2) $f(D_i(\lambda)X) = \dfrac{\det(D_i(\lambda)XB)}{\det(B)} = \lambda f(X)$

3) $f(F_{ij}(c)X) = \dfrac{\det(F_{ij}(c)XB)}{\det(B)} = f(X)$

4) $f(\mathbb{1}_n) = \dfrac{\det(\mathbb{1}_n B)}{\det(B)} = 1.$

$\Rightarrow f(X) = \det(X)$ $\forall X$

$\Downarrow$

$(*)$.

$\square$

__COR 1__ : $\det(AB) = \det(BA)$.

__COR 2__ : A invertibile $\Rightarrow$ $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Quindi il determinante è "moltiplicativo"

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

__NB__ : Il determinante $\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ __non__ è lineare :

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B) \quad !!$$

$$\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A) \quad !!$$

__OSS__ : $\det(\lambda A) = \det(\lambda A_1, \lambda A_2, \dots, \lambda A_n) = \lambda^n \det(A)$.

Abbiamo visto che

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Vediamo un'altra tecnica di calcolo:

Sviluppo di Laplace sulle righe

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det\big((2\ 1\ 3),(3\ 0\ 1),(4\ -1\ -2)\big)$$

$$= \det\big(2(1\ 0\ 0)+(0\ 1\ 0)+3(0\ 0\ 1),\ (3\ 0\ 1),\ (4\ -1\ -2)\big)$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Linearità sulla 1ª riga

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{(-1)^2}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{+}}} 3\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \det^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \det^{(3)}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 3 \det^{(3)}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2ª e 3ª riga   1ª e 3ª riga   1ª e 2ª riga

$$\overset{!!}{=} 2 \det^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \det^{(2)}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 3 \det^{(2)}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Quindi se $\det^{(2)}$ esiste esiste anche $\det^{(3)}$

(2) Quindi fornisce una tecnica di calcolo <u>ricorsiva</u>

$$\det^{(3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \det^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \det^{(2)}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 3 \det^{(2)}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Idea: Calcolare $\det^{(n)}$ come somme di $\det^{(n-1)}$ di sottomatrici.

OSS: Nell'esempio potevamo scegliere la seconda riga:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det\left((2\ 1\ 3),\ (3\ 0\ 1),\ (4\ -1\ -2)\right)$$

$$= \det\left((2\ 1\ 3),\ 3\overbrace{(1\ 0\ 0)}^{e_1^t} + 0\overbrace{(0\ 1\ 0)}^{e_2^t} + \overbrace{(0\ 0\ 1)}^{e_3^t},\ (4\ -1\ -2)\right)$$

linearità sulla 2° riga

$$= 3\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 3\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -3\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -3\det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \det^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>: Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Siano $1 \le i, j \le n$ due indici (i di riga e j di colonna). Definiamo la matrice $A_{ij} \in Mat_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ ottenuta da A rimuovendo la riga i e la colonna j.

<u>Es</u>:

·) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ $A_{1,1} = (d)$ $\quad A_{1,2} = (c)$

$A_{2,1} = (b)$ $\quad A_{2,2} = (a)$

$$\det^{(2)} A = ad - bc = \overset{11}{a} A_{11} - \overset{12}{b} A_{12}$$

·) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Teorema (Sviluppo di Laplace sulle righe)

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora, fissato $i \in \{1,\dots,n\}$, si ha

$$\det^{(n)}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det^{(n-1)}(A_{ij}) (-1)^{i+j}$$

In particolare, il determinante esiste.

Segni:

$$(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ -2 & -1 & 13 \end{pmatrix} \overset{\text{Sviluppiamo lungo la } 2^a \text{ riga } (i=2)}{=} 4 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}(-1)^3 + 7\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}(-1)^4 +$$

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$$+ (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}(-1)^5 =$$

$$= -4\,(29) + 7\,(19) - (-1)\,(3) = 20$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ -2 & -1 & 13 \end{pmatrix} \overset{\text{lungo la } 1^a \text{ riga}}{=} 1\det\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 13 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 90 - 100 + 30 = 20$$

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sviluppo sulla 4ª riga

$$\doteq 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sviluppo lungo 1^a riga

$$= -2\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppo lungo 3^a riga

$$= -2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2(2-1) - (4-8) = -2+4 = 2.$$

Per calcolare det:

1) Usare le op. elementari sulle righe per creare una riga con <u>tanti</u> <u>zeri</u>

2) Sviluppare lungo quella riga.