<u>Commento</u>: ·) Guardare anche gli appunti delle lezioni ad ingegneria chimica.

·) Continuate a mandarmi feedback (civile o ambiente e territorio).

<u>Domande</u>: ? Sviluppo di Laplace.

<u>oggi</u>:

→ Sviluppo del determinante sulle colonne.

→ Formule per l'inversa.

→ ?

Richiami: Il determinante $(n \times n)$ è una funzione

$$\det : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

che ha le seguenti proprietà:

1) $\det(P_{ij} A) = -\det(A) \qquad i \neq j$
2) $\det(D_i(\lambda) A) = \lambda \det(A) \qquad \lambda \in \mathbb{K} \qquad \longleftarrow \; !$
3) $\det(F_{ij}(c) A) = \det(A) \qquad c \in \mathbb{K}$
4) $\det(\mathbb{1}_n) = 1$

(2)

Es: $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \det((2,3), (5,7)) =$

$$= \det\left(2\left(1, \frac{3}{2}\right), (5,7)\right) \overset{(2)}{=} 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \det((4,6), (5,7)) = \det(2(2,3), (5,7))$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1/2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\left(\left(\frac{1}{2},3\right),(2,5)\right)$$

$$= \det\left(\frac{1}{2}(1,6),(2,5)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Teorema di Laplace: Fissato i, $A \in Mat_{n\times n}$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\det(A_{ij})(-1)^{i+j}$$

$$A_i = \sum a_{ij}\, e_j^t$$

$$(a_{i1},\dots,a_{in}) =$$

$$a_{i1}(1,0,\dots,0) + a_{i2}(0,1,0,\dots,0)$$

$$+ a_{in}(0,0,\dots,0,1)$$

La trasposizione

Siano $m, n \geq 1$, la f.ne "Trasposizione" è

$$(\ )^t : \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

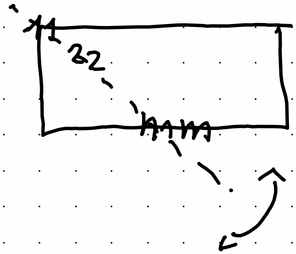
$$A \longmapsto A^t = \text{Trasposta di } A$$

definita da

$$(A^t)^j_i = A^i_j$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

"leggo la riga i di A da sin. a dst e la scrivo come colonna i di A^T dall'alto in basso"



$$(A^t)^j = A_j^t$$

Abbiamo visto che la trasposizione è lineare

$$(\alpha A+\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t \qquad \forall A, B \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Prop.: Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in Mat_{n\times h}(\mathbb{K})$

Allora

$$(AB)^t = \underset{h\times n}{B^t}\,\underset{n\times m}{A^t} \in Mat_{h\times m}(\mathbb{K})$$

$$\cancel{\underset{n\times m}{A^t}\,\underset{h\times n}{B^t}}$$

dim:

$$[(AB)^t]^j_i := (AB)^i_j = A_j B^i$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [A^t]^j_k [B^t]^k_i = (B^t)_i (A^t)^j =$$

$$= [B^t A^t]^j_i \qquad \blacksquare$$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 , 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}^t$$

OSS: L'inversa ha la stessa proprietà:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Vediamolo.

Prop.: Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{K})$. Allora

$$AB \text{ è invertibile} \iff A \text{ è invertibile e } B \text{ è invertibile.}$$

In questo caso

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dim:

$\Rightarrow$)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "AB"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Supponiamo AB invertibile. Sia C la sua inversa. Allora

$$(AB)C = \mathbb{1}_n = C(AB)$$

$\Rightarrow \quad A(BC) = \mathbb{1}_n \quad \underset{\substack{\text{perché} \\ A \text{ è quadrata}}}{\Rightarrow} \quad A$ è invertibile

$\Rightarrow \quad (CA)B = \mathbb{1}_n \quad \underset{\substack{B \text{ è} \\ \text{quadrata}}}{\Rightarrow} \quad B$ è invertibile

$$(1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \qquad (1,0): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(AB)C = \mathbb{1}_n \implies A(BC) = \mathbb{1}_n \implies BC = A^{-1}$$

$$\implies C = B^{-1}A^{-1}$$

Quindi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $\boxtimes$

$\Leftarrow$) Se A e B sono invertibili allora

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbb{1}_nA^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{1}_n$$

$\implies$ $B^{-1}A^{-1}$ è un'inversa destra di AB

$\implies$ $B^{-1}A^{-1}$ è anche un'inversa sinistra

AB è quadrata

$\implies$ AB è invertibile. $\boxtimes$

COR (della prop. $(AB)^t = B^t A^t$):

Sia $A \in Mat_{m\times m}(\mathbb{K})$. Allora

A è invertibile $\Leftrightarrow$ A^t è invertibile.

In questo caso

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

dim: A è quadrata

A invertibile $\Leftrightarrow \exists\, C$ t.c. $AC = \mathbb{1}_n$

$$(AC)^t = (\mathbb{1}_n)^t = \mathbb{1}_n \Rightarrow C^t A^t = \mathbb{1}_n$$

$\Rightarrow A^t$ è invertibile e

Viceversa,

$(A^t)^t = A$. Quindi basta rifare lo stesso ragionamento sopra. $\blacksquare$

Prop.: Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$, siano $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $C \in Mat_{m\times m}(\mathbb{K})$ <u>invertibili</u>.
Allora
$$rg(CA) = rg(AB) = rg(A).$$

<u>dim</u>:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[d, "C", "\simeq"'] \\ \bullet \arrow[r, "CA"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Sia $\{A^{j_1}, .., A^{j_r}\}$ una base di $Im\, A$.
~~Dato che C è un isomorfis~~
Allora
$$\{CA^{j_1}, .., CA^{j_r}\}$$
è una base di $Im(CA)$.

$$Col(CA) = \langle CA^1, CA^2, .., CA^m \rangle = C\langle A^1, A^2, .., A^m \rangle$$

$$x_1 CA^1 + x_2 CA^2 + .. + x_n CA^n = C(x_1 A^1 + .. + x_n A^n)$$

$$= C\langle A^{j_1}, .., A^{j_r}\rangle = \langle CA^{j_1}, .., CA^{j_r}\rangle.$$

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "AB"] \arrow[d, "B"', "\simeq"] & m \arrow[d, equal] \\ n \arrow[r, "A"'] & m \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{rg}(AB) = n - \dim \operatorname{Ker}(AB)$$

$$\dim \operatorname{Ker}(AB) = \dim \operatorname{Ker} A.$$

Infatti, sia $\{X_1, \dots, X_k\}$ una base di $\operatorname{Ker}(AB)$

$$\Longrightarrow \quad (AB)X_1 = 0_m = (AB)X_2 = \dots = (AB)X_k$$

$$\Longrightarrow \quad A(BX_i) = 0_m \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$\Longrightarrow \quad \{BX_1, BX_2, \dots, BX_k\} \subset \operatorname{Ker} A$$

È una base di Ker A:

$$* \quad t_1 BX_1 + \dots + t_k BX_k = 0_n \Longrightarrow B(t_1X_1 + \dots + t_kX_k) = 0_n$$

$$\Longrightarrow \quad t_1X_1 + \dots + t_kX_k \in \operatorname{Ker} B = \{0_n\}$$

$$\Longrightarrow \quad t_1X_1 + \dots + t_kX_k = 0_{\mathbb{K}^n} \Longrightarrow t_1 = \dots = t_k = 0.$$

Sia $Y \in \operatorname{Ker} A$. $\quad AY = 0_m$

$\Rightarrow AB(B^{-1}Y) = 0_m \quad \Rightarrow B^{-1}Y \in \operatorname{Ker}(AB)$

$\Rightarrow \exists\, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ t.c. $B^{-1}Y = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_k X_k$

$\Rightarrow Y = t_1 BX_1 + t_2 BX_2 + \dots + t_k BX_k$

$\Rightarrow \{BX_1, \dots, BX_k\}$ genera $\operatorname{Ker} A$.

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A = k = \dim \operatorname{Ker}(AB)$

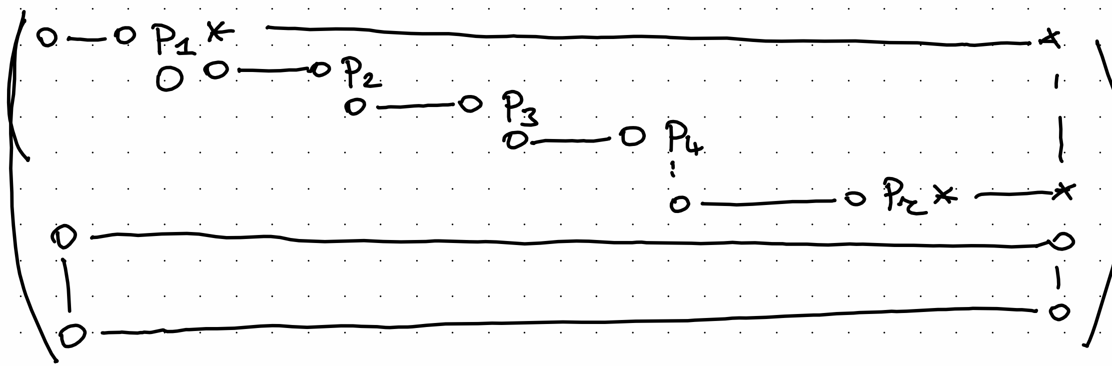
$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{rg}(AB) &= n - \dim \operatorname{Ker}(AB) \\ &= n - \dim \operatorname{Ker}(A) \\ &= \operatorname{rg}(A). \end{aligned}$$

$\boxtimes$

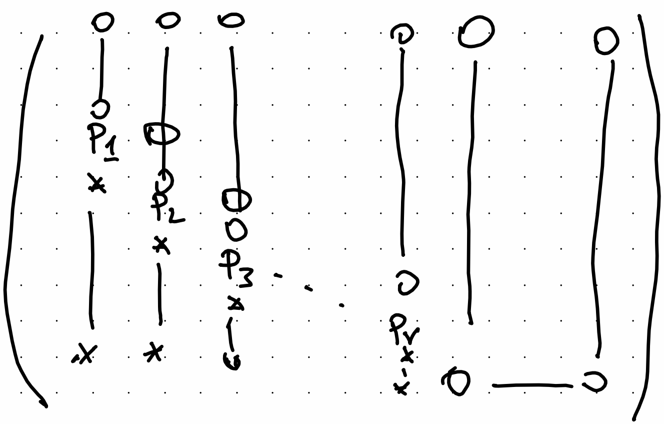
Teorema: $\mathrm{rg}(A^t) = \mathrm{rg}(A)$

dim: Dimostriamo prima il teorema per le matrici a scala:

$S =$



$S^t =$



Quindi $\mathrm{rg}(S^t) = \mathrm{rg}(S) = r$.

Sia A una matrice $m \times n$ qualunque.
Esiste una matrice invertibile t.c.

$$CA = S \quad \text{dove } S \text{ è a scala.}$$

$$A = ES \quad \text{con } E = C^{-1} \text{ invertibile.}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(ES) \underset{\text{prop.}}{=} \operatorname{rg}(S) = \operatorname{rg}(S^t) = \operatorname{rg}\left((CA)^t\right)$$

Prop.

$$= \operatorname{rg}(A^t C^t) \underset{\substack{\text{prop.:} \\ C^t \text{ è inv.}}}{=} \operatorname{rg}(A^t).$$

$\blacksquare$

Teorema : $\det(A^t) = \det(A)$ se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

dim :

$rg(A^t) = rg(A)$. Quindi

$\det(A^t) = 0 \iff \det(A) = 0$

Supponiamo che $\det(A^t) \neq 0$, $\det(A) \neq 0$.

Allora A e A^t sono invertibili.

In particolare esistono matrici elementari $E_1, \dots, E_s$ t.c.

$$A = E_1 \cdots E_s$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(E_1) \cdot \ldots \cdot \det(E_s)$$

$$A^t = (E_1 \cdots E_s)^t = E_s^t \cdot E_{s-1}^t \cdots E_2^t E_1^t$$

$$\Rightarrow \det(A^t) = \det(E_s^t)\det(E_{s-1}^t)\cdots\det(E_2^t)\det(E_1^t)$$

Quindi basta far vedere che $\det(E) = \det(E^t)$ per ogni matrice elementare E

·) $P_{ij}^t = P_{ij}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

·) $D_i(\lambda)^t = D_i(\lambda)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

·) $F_{ij}(c)^t = F_{ji}(c)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$

Quindi: $\det(E) = \det(E^t)$ $\forall E$ elementare !

$\boxtimes$

Possiamo calcolare il determinante operando sulle colonne!

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{c^1 \mapsto c^1 - c^2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{c^1 \mapsto c^1 - c^3}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{c^2 \leftrightarrow c^3}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underline{1}$$

$$\begin{cases} \det(A P_{ij}) = -\det(A) \\ \det(A D_i(\lambda)) = \lambda \det(A) \\ \det(A F_{ij}(c)) = \det(A) \end{cases}$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{c^1 \leftrightarrow c^4}{\overset{!}{=}} -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

In conclusione, per calcolare il determinante possiamo:

1) operare sulle righe e sulle colonne per creare una riga o una colonna con tanti zeri

2) Applicare Laplace su quella riga o su quella colonna.

3) $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Dal Teorema $\det(A^t) = \det(A)$ segue

Sviluppo di Laplace sulle colonne

Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Fissato $j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(A_{ij}) (-1)^{i+j}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= +2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cancel{+} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2(2-1) + 2(4-2) = 2$$