## Richiami: Applicazioni del determinante:

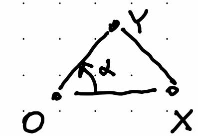
1) $$A \, \mathrm{Agg}(A)^t = \overset{(n)}{\det}(A) \, \mathbb{1}_n \quad , \text{ dove } \quad \mathrm{Agg}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \overset{(n-1)}{\det}(A_{i,j}) \, (-1)^{i+j}$$

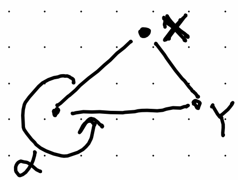
COR: Se $A$ è invertibile, allora $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Agg}(A)^t$

2) Il determinante è un'area "orientata". $n = 2$.

$$A(X,Y) := \begin{cases} \text{Area}(0, X, Y) \\ \\ -\text{Area}(0, X, Y) \end{cases}$$




$\alpha \leq 180°$

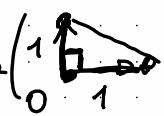



$\alpha \geq 180°$

Area (  ) = 0


$$\boxed{2A(X,Y) = \det(X|Y)}$$

$$\boxed{A(X,Y) = \frac{1}{2}\det(X|Y)}$$

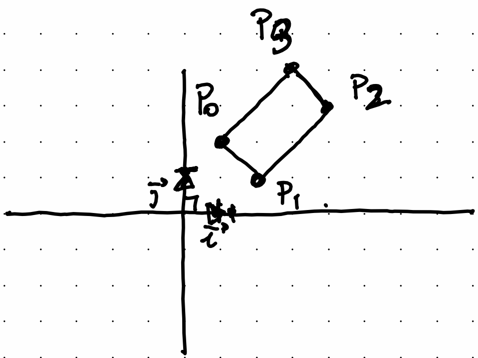
Area (  ) $= \frac{1}{2}$


$\det(e_1|e_2) = 1 = \cancel{2}$ Area (  )

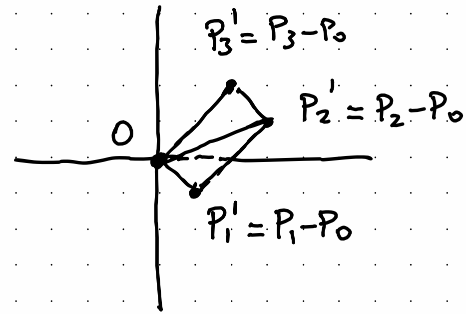
$\mathbf{2}$

$\underline{Es}$: Calcolare l'area del quadrilatero convesso di vertici

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$




$\rightsquigarrow$




$\underline{Sol.}$:

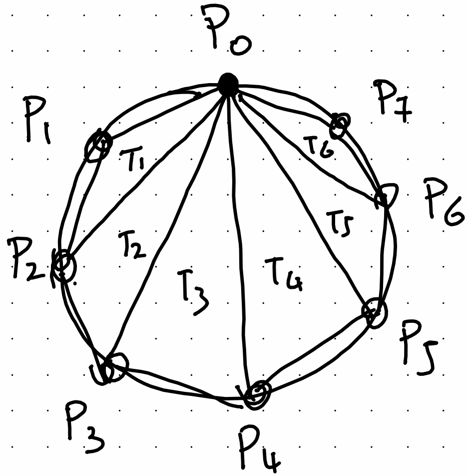
$$\mathrm{Area}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \mathrm{Area}(\overset{P_0'}{\overset{\parallel}{O}}, P_1', P_2', P_3') \quad \text{dove } P_i' = P_i - P_0$$

$$= \mathrm{Area}(O, P_1', P_2') + \mathrm{Area}(O, P_2', P_3')$$

$$= \frac{1}{2}\det(P_1' \mid P_2') + \frac{1}{2}\det(P_2' \mid P_3') = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}4 = 4$$

$$\text{Area}$$




$$= \sum_{i=1}^{6} \text{Area}(T_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \det\left(P_{i+1} - P_0 \mid P_i - P_0\right)$$

## 3) Determinante di Vandermonde

Dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Van}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_1^2 & & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

Es:

$$\mathrm{Van}(2, -1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Van}(-1, 2, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Van}(-1, -3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

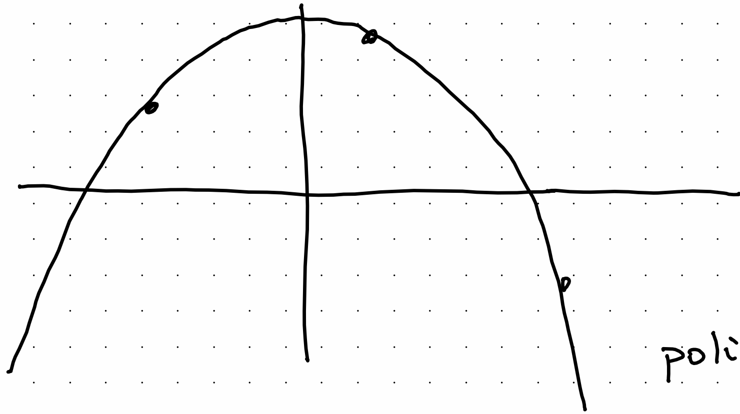
$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[x]_{\leq n-1} \arrow[r, "="] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}[x]_{\leq n-1} \arrow[d, "F_{e}"] \\
\mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\mathrm{Van}(x_1, \dots, x_n)"]
\end{tikzcd}
$$

dove

$$F = F_{\mathcal{B}}\left(p(x)\right) = \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$ è un isomorfismo se e solo $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$.

$$\mathrm{Van}(x_1, \dots, x_n) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ F(1) & F(x) & F(x^2) & & F(x^{n-1}) \end{array} \end{array}$$

Vedremo:



polinomio interpolatore dei 3 punti.

$$\det \mathrm{Van}(x_1,\dots,x_n) = \underbrace{\prod_{i>j}}_{\text{“produttoria”}} (x_i - x_j).$$

Determinante di Vandermonde.

produttorio

$$= (x_n - x_1)(x_{n-1} - x_1)\cdots(x_2 - x_1)$$
$$(x_n - x_2)\cdots(x_3 - x_2)\cdots$$

$\underline{n=3}$:

$$\det \mathrm{Van}(x_1, x_2, x_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$
$$x_3^2 - x_1^2 = (x_3 - x_1)(x_3 + x_1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = \prod_{i > j} (x_i - x_j)$$

## Utilizzo del determinante per il calcolo del rango di una matrice qualunque: il Teorema degli orlati

Se $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ quadrata allora

$$rg(A) = n \iff \det(A) \neq 0.$$

già visto.

Vogliamo "generalizzarlo" a matrici qualunque $m \times n$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ le colonne dominanti di $A$ sono

$$A^1, A^2 \Rightarrow B = (A^1 | A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

allora $\det(B) \neq 0$.

Idea: Ricondursi a "sottomatrici"

**Def / Notazione**: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Siano $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq m$ degli indici "di riga" e

siano $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$ degli indici "di colonna".

La matrice

$$A\left([i_1, \dots, i_s], [j_1, \dots, j_t]\right) \in Mat_{s \times t}(\mathbb{K})$$

denota la sottomatrice di $A$ supportata sulle righe $i_1, \dots, i_s$ e sulle colonne $j_1, \dots, j_t$.

In MATLAB: il comando è

$$A\left([i_1, \dots, i_s], [j_1, \dots, j_t]\right)$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A([1,3],[2,4]) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A([1,3],[2,4,5]) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A([2,3,4],[1]) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

**Def:** Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ e sia

$$B = A([i_1, \dots, i_k], [j_1, \dots, j_k]) \in Mat_{k \times k}(\mathbb{K})$$

una sua sottomatrice di ordine $k$.

Diciamo che la sottomatrice

$$A([i_1, \dots, i_k] \cup \{l\}, [j_1, \dots, j_k] \cup \{s\}) \in Mat_{k+1, k+1}(\mathbb{K})$$

ottenuta da $B$ "aggiungendo la riga $l$ e la colonna $s$" ($l \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, $s \notin \{j_1, \dots, j_k\}$) orla la matrice $B$ ed è un'orlata di $B$.

**Es:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$B = A([1,2],[1,2])$

$A([1,2,3],[1,2,3])$

$A([1,2,4],[1,2,3])$

sono le 2 orlate di $B$

**Def:** Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$.
Dato $1 \leq k \leq \min(m,n)$, un <u>minore di ordine $k$</u> di $A$ (o <u>$k$-minore</u>) è il determinante di una sotto-matrice di $A$ di taglia $k \times k$.

**Es:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Dobbiamo scegliere
2 righe tra 3 = $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$
2 colonne tra 4 = $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}$
$\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$

Ci sono $3 \cdot 6 = 18$ minori di ordine 2. Ad esempio

$$\det A([1,2],[1,2]) = 5 \qquad \det A([2,3],[2,4]) = 4$$

Ci sono 4 minori di ordine 3. Ad esempio

$$\det A([1,2,3],[1,2,3]) = \dots = -15$$

# Teorema degli orlati

Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$rg(A) = r \iff \exists$ un $r$-minore diverso da zero tale che tutti i suoi minori orlati sono diversi da zero

In formule:

$rg(A)=r \iff \exists\ r$ indici di riga $1 \le i_1 < \dots < i_r \le m$ ed $r$ indici di colonna $1 \le j_1 < \dots < j_r \le n$ t.c.

$$\det\left(A([i_1,\dots,i_r],[j_1,\dots,j_r])\right) \neq 0 \quad \text{e}$$

$$\det\left(A([i_1,\dots,i_r]\cup\{l\},[j_1,\dots,j_r]\cup\{s\}\right)=0$$

$$\forall\ l \notin \{i_1,\dots,i_r\} \ \text{e}\ \forall s \notin \{j_1,\dots,j_r\}.$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

1 passo:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$ 1- minore $\neq 0$.

~~In~~ minori che orlano $A([1],[1])$ sono:

$\det A([1,2],[1,2])$, $\det A([1,2],[1,3])$, $\det A([1,2],[1,4])$

$\det A([1,3],[1,2])$, $\det A([1,3],[1,3])$, $\det A([1,3],[1,4])$

sono solo 6, non 18

Dato che il minore orlato $\det\big(A([1,2],[1,2])\big) = 5 \neq 0$ per il Teorema degli orlati $\operatorname{rg} A \geq 2$.

$2^\circ$ passo : minore $2 \times 2 \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

2-minore $\neq 0$.

I suoi minori orlati sono

$\det A([1,2,3],[1,2,3])$ e $\det A([1,2,3],[1,2,4])$

$$\det A([1,2,3],[1,2,3]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = -15 \neq 0$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$. (non ci sono 4-minori)

Es: Stabilire se l' insieme

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é lin. Ind.

Sol.:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

**Es:** Stabilire se

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è lin. Ind.

**Sol.:** $\mathcal{I}$ è lin. Ind. $\iff$ $rg \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}^{A} = 3$

$\underset{\text{Teorema degli orlati}}{\iff}$ $\exists$ 3-minore di $A \neq 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $rg\, A < 3$ $\Rightarrow$ $\mathcal{I}$ <u>non</u> è lin. Ind.

Attenzione! manca un minore: $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$