Sistemi di equazioni lineari

Un' <u>equazione lineare nelle n variabili $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$</u> è un' equazione del tipo

$$(*) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

per qualche $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

<u>Es</u>: $n = 1$: $\quad 2x = 3$ è lineare nella variabile x

$2x^2 = 1$ non è lineare nella variabile x.

$n=2$: $\quad 2x + 3y = 1$ è lineare nelle variabili x e y

$x^2 + y^2 = 1$ non è lineare nelle variabili x e y.

$(*)$ è equivalente all' equazione matriciale

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

"prodotto righe per colonne"

Una <u>soluzione</u> di

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

è una n-ple ordinata $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{x}_n = b$$

vale in $\mathbb{K}$.

<u>Es</u>: Una soluzione di $2x = 3$ è $\bar{x} = \frac{3}{2} = 2^{-1} \cdot 3$

<u>OSS</u>: questa soluzione è unica

Consideriamo l'equazione $0x = 3$ non ha soluzione in $\mathbb{R}$.

L'equazione $0x = 0$ ha come soluzioni il campo $\mathbb{K}$.

L'equazione di una variabile x

$$ax = b$$

ha come soluzioni:

$$\begin{cases} \left\{ \frac{b}{a} \right\} & \text{se } a \neq 0 \\ \mathbb{K} & \text{se } a = b = 0 \\ \emptyset & \text{se } a = 0 \text{ e } b \neq 0. \end{cases}$$

Terminologia: I numeri $a_1, \dots, a_n$ dell'equazione (*) si chiamano i <u>coefficienti</u> dell'equazione. il numero b si chiama il suo <u>Termine noto</u>.

$$p(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b$$

(*) è $p(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Date m equazioni lineari nelle n variabili $x_1, \dots, x_n$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \qquad \text{(eq. 1)}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \qquad \text{(eq. 2)}$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 \qquad \text{(eq. 3)}$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \qquad \text{(eq. m)}$$

a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$,

Una soluzione $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ comune a tutte queste equazioni si chiama una soluzione del <u>sistema</u> delle m equazioni lineari date.

Se siamo interessati a trovare una tale soluzione scriviamo

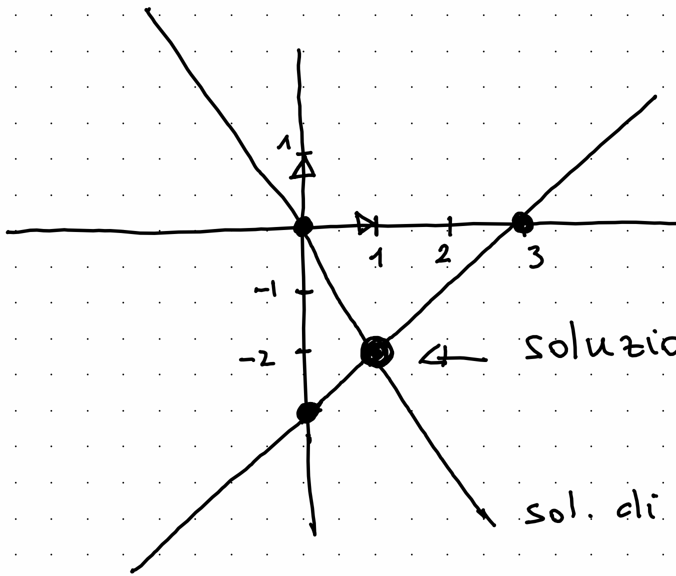
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Es: Cerchiamo le soluzioni del sistema in due variabili x, y a coefficienti reali

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

è equivalente "ha le stesse soluzioni" di

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = x - 3 \end{cases}$$



sol. di $y = x - 3$

soluzioni del sistema. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

sol. di $y = -2x$

<u>Es</u> (Nicholson): Istituto di beneficenza ha bisogno di 50.000 € all'anno da destinare alla ricerca sul cancro. Istituto ha 480.000 €. investiti in due fondi che danno 10% e 11% di interessi annui. Quanto deve investire in ciascuno di questi fondi ?

<u>Sol.</u>: x = fondi investiti al 10%

y = fondi investiti al 11%

$$\begin{cases} x + y = 480.000 \\ 10\% \, x + 11\% \, y = 50.000 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 480.000 \\ \frac{10}{100} x + \frac{11}{100} y = 50.000 \end{cases}$$

$$\left[\iff \quad AX = b \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{10}{100} & \frac{11}{100} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 480.000 \\ 50.000 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 10y = 4.800.000 \\ 10x + 11y = 5.000.000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 200.000 \\ 10x + 10y = 4.800.000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 200.000 \\ x = 280.000 \end{cases}$$

$\blacksquare$

Sia

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

un <u>sistema lineare</u> in n variabili $x_1, \dots, x_n$, di m equazioni a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.

Una soluzione di questo sistema è una soluzione $\overline{X}$ dell'equazione matriciale

$$AX = b \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A si chiama la <u>matrice dei coefficienti</u> del sistema,
b si chiama la <u>matrice dei termini noti</u> del sistema,
X si chiama la <u>matrice delle variabili</u> del sistema.
La matrice $(A \mid b) \in Mat_{m \times (n+1)}(\mathbb{K})$ si chiama la <u>matrice completa</u> del sistema.

Teorema (di Rouché-Capelli)

Il sistema $AX=b$ ammette soluzioni se e solo se

$$rg(A) = rg(A|b).$$

dim:

$AX=b$ ha soluzione $\Leftrightarrow$ $b \in Col(A)$

$\Leftrightarrow$ b non è una colonna dominante di $(A|b)$

$\Leftrightarrow$ le colonne dominanti di $(A|b)$ sono esattamente le colonne dominanti di A

$\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg(A|b)$.

$\boxtimes$

Due sistemi lineari $AX=b$ e $A'X=b'$ di m equazioni in n variabili si dicono <u>equivalenti</u> se hanno le stesse soluzioni.

Un sistema si dice <u>risolubile</u> se ammette almeno una soluzione.

<u>Es</u>:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad b \notin Col(A)$. Quindi

$AX=b$ non è risolubile.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} i \\ 4i+1 \end{pmatrix}$ $\quad b \in Col(A) = \mathbb{C}^2$

$AX=b$ è risolubile.

Sia $AX=b$ un sistema risolubile.
Come sono fatte le soluzioni?

<u>Teorema</u> (<u>di struttura</u> delle soluzioni di un sistema lineare)

L'insieme delle soluzioni di un sistema risolubile $AX=b$ ~~di~~ m equazioni in n variabili a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ è

$$X_0 + \operatorname{Ker} A = \{ X_0 + v \mid v \in \operatorname{Ker} A \}$$

dove X_0 è una soluzione particolare di $AX=b$.

<u>dim</u>: Sia $\bar{X}$ una soluzione di $AX=b$. Allora

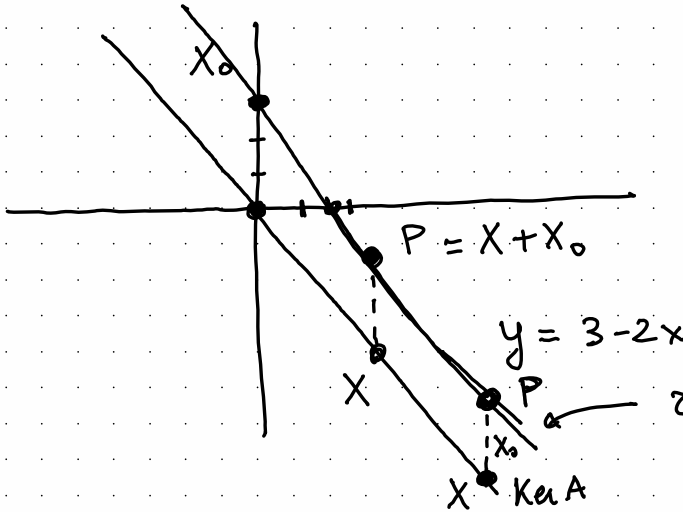
$$A\bar{X} = b = AX_0 \Rightarrow A(\bar{X}-X_0) = 0_m \Rightarrow \bar{X}-X_0 \in \operatorname{Ker} A$$

$$\Rightarrow \bar{X} = X_0 + (\bar{X}-X_0) \in X_0 + \operatorname{Ker} A.$$

Viceversa, se $v \in \operatorname{Ker} A$ allora $A(X_0+v) = AX_0 + Av = AX_0 = b$ e quindi X_0+v è una soluzione di $AX=b$ $\blacksquare$

$\underline{Es}$: $r: \; 2x+y=3$ $\qquad A=(2,1), \quad b=3.$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ +3 \end{pmatrix}$$

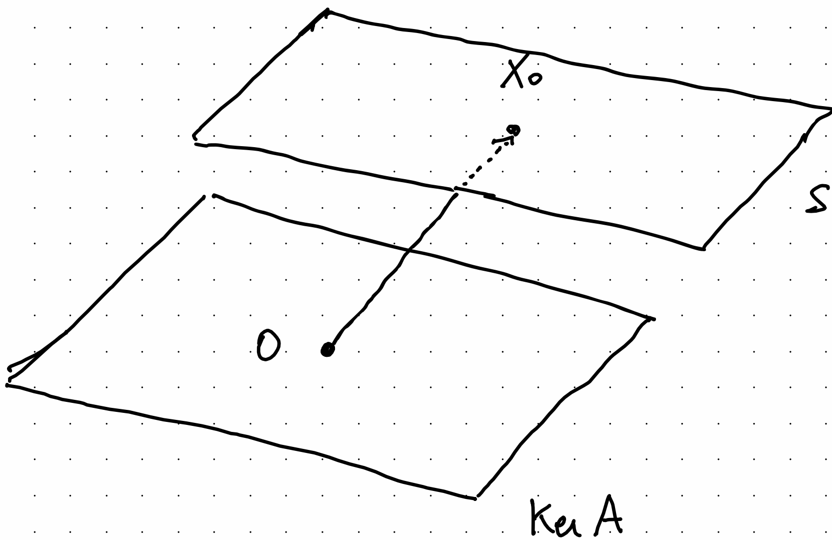


$r = X_0 + Ker\,A$

$r_0 = Ker\,A = \quad 2x+y=0 \qquad AX=0.$

"Significato geometrico"

le soluzioni di un sistema $AX=b$ sono il traslato di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.



Soluzioni di $AX=b$.

OSS: $\{\text{Soluzioni di } AX=b\} = S_A^{-1}(b) =$ controimmagine di b tramite S_A.

Sia $X_1, \dots, X_k$ una base di $\operatorname{Ker} A$.
Allora le soluzioni di $AX = b$ sono della forma

$$X_0 + t_1 X_1 + \dots + t_k X_k$$

|| Descrizione parametrica delle soluzioni.

al variare di $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$.

<u>OSS</u>: $k = n - rg(A)$ (per il Teorema della dimensione).

Si dice che il sistema $AX=b$ ammette

$$\infty^{n - rg(A)}$$

soluzioni, intendendo che le soluzioni sono descritte da $(n - rg(A))$ parametri.

Per Trovare le soluzioni di $AX=b$:

1) Trovare una base di Ker A

2) Trovare un X_0.

$$(A|b) \rightsquigarrow rref(A|b) = (\overbrace{rref(A)}^{R}|c)$$

1) $\Leftrightarrow$ Trovare le soluzione-base di $RX=0$.

2) Per Trovare X_0: Nelle equazioni $RX=c$ porre Tutte le variabili libere $=0$, le variabili dipendenti uguali a c_i.

$$(X_0)_j = \begin{cases} c_i & \text{se } j \text{ è dominante ed è sulla riga } i. \\ 0 & \text{se } j \text{ non è dominante} \end{cases}$$

Comandi MATLAB:

variabili $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = sym('x', [n, 1]) = X

$$eqn(i) = a_{i1} * X(1) + a_{i2} * X(2) + \dots + a_{in} * X(n) == b_i$$

[A, b] = equationsToMatrix(eqn 1, .., eqn m)

Es: Studiare il seguente sistema nelle variabili x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Sol.:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -\underset{1}{\cancel{5/3}} & -\underset{2}{\cancel{10/3}} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \cancel{19/3} & 32/3 \\ 0 & \cancel{1} & -5/3 & -10/3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}_{Rref(A)}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= x_0} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>OSS</u> (cruciale): Le operazioni elementari sulle righe di $(A|b)$ non cambiano le soluzioni di $AX=b$.

$$AX=b \underset{\text{è equivalente}}{\sim} RX=c \quad \text{dove}$$

$$R=\mathrm{rref}(A).$$

$$(R|c)=\mathrm{rref}(A|b).$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \circ \arrow[d, "C"] \\ \circ \arrow[r, "R"'] & \circ \end{tikzcd}$$

operare sulle righe
$\quad$ ||
cambiare base in <u>arrivo</u>.
⇒ Il nucleo non cambia

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, "AC"] \arrow[d, "C"'] & \circ \arrow[d, equal] \\ \circ \arrow[r, "A"'] & \circ \end{tikzcd}$$

operare sulle colonne
$\quad$ ||
cambiare base in <u>partenza</u>
⇒ Ker A <u>cambia</u>.

Sistemi non-singolari

$$AX=b$$

Un sistema si dice <u>non-singolare</u> se ammette <u>un'unica soluzione</u>.

$$AX=b \quad \text{t.c.} \quad rg(A)=rg(A|b) \quad e$$

$$n-rg(A)=0$$

$\iff \quad rg(A)=n \quad \iff \quad \ker A = 0_n$.

$\iff \quad S_A : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^m$ è iniettiva e $b \in \operatorname{Im} S_A$.

Quand'è che $AX=b$ ammette un'unica soluzione $\forall b \in \mathbb{K}^m$?

Se e solo se A è invertibile.

In questo caso l'unica soluzione è

$$\boxed{X_0 = A^{-1} b.}$$