Richiami sistemi lineari

È equazione del tipo $Ax = b$

$A \in Mat_{m \times n}$ $\quad b \in Mat_{m \times 1}$ $\quad x \in Mat_{n \times 1}$

$(A|b) \rightsquigarrow$ riduco a scala

Teo. di Rouché - Capelli

$\exists$ soluzione $\iff rk A = rk(A|b)$

$Ax = b \iff CAx = Cx$ se C è invertibile

(la riduzione a scala)

Se $\exists$ soluzione x_0 : $Ax_0 = b$

$\Rightarrow$ l'insieme di tutte le soluzioni $= x_0 + \ker A$

Il sistema $Ax = 0$ si dice "omogeneo"

$\forall b$ $\exists!$ soluzione x_0 se e solo se A è invertibile

in tal caso abbiamo che $x_0 = A^{-1} b$

Formula di Cramer

Voglio risolvere $Ax = b$ con A invertibile

$\iff$ voglio calcolare $x_0 = A^{-1} b$

$$x_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad c_j = \frac{\det(A^j(b))}{\det A}$$

dove $A^j(b)$ è la matrice ottenuta da A mettendo il vettore b al posto di A^j

$$A^j(b) := \left(A^1 \middle| A^2 \middle| \dots \middle| A^{j-1} \middle| b \middle| A^{j+1} \middle| \dots \middle| A^n \right)$$

Formula di Cramer per $x_0 = A^{-1}b$ è una conseguenza della formula di Cramer per A^{-1}

$$A \cdot Agg(A)^t = \det(A) \cdot \mathbb{1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Agg(A)^t$$

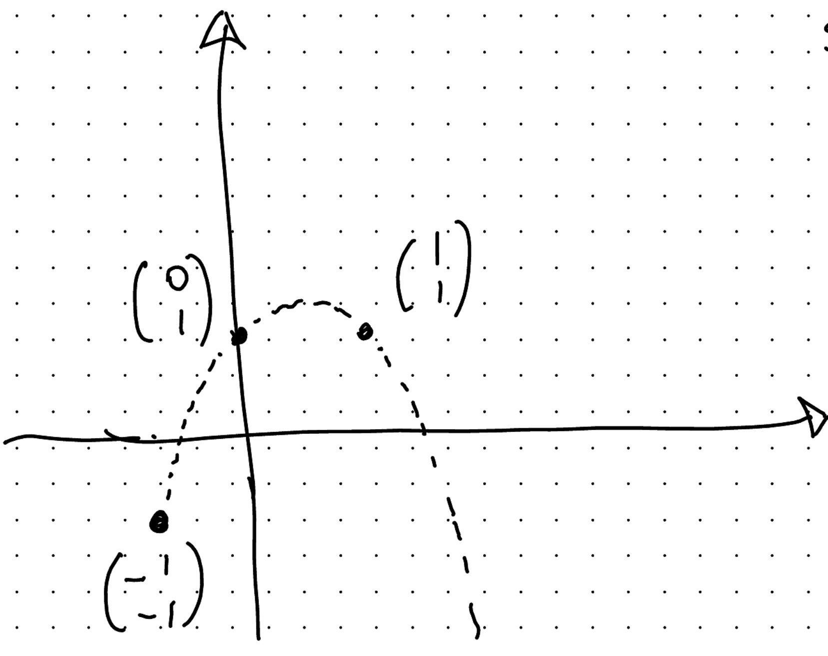
se voglio $A^{-1}b = \frac{1}{\det A} Agg(A)^t b$

$$\left(A^{-1}b\right)_j = \frac{1}{\det A} \left(Agg(A)^t\right)_j b =$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_k (-1)^k C_{jk} b_k = \frac{1}{\det A} \det A^j(b)$$

Problema: voglio calcolare il polinomio interpolatore

ovvero il polinomio il cui grafico passa per alcuni punti assegnati del piano



Studio la mappa di valutazione sui punti $-1, 0, 1$

$$p(x) \overset{F}{\longmapsto} \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se scrivo i polinomi nella base standard $(1, x, x^2)$

F è associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = V(-1, 0, 1) \text{ (matrice di Vand.)}$$

voglio risolvere il sistema $Ax = b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proviamo ad applicare Cramer:

$$x_0 = A^{-1} b = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A^1(b) \\ \det A^2(b) \\ \det A^3(b) \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det V(-1,0,1) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

$$= (0-(-1))(1-(-1))(1-0) = 2$$

$$\det A^1(b) = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det A^2(b) = \dots = 2$$

$$\det A^3(b) = \dots = -2$$

la soluzione è $x_0 = A^{-1} b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

quindi $p_0(x) = 1 + x - x^2$

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j) = \circledast$$

$x_1 = -1$
$x_2 = 0$
$x_3 = 1$

$i, j \in \{1, 2, 3\}$

$i = 2 \quad j = 1 \qquad (x_2 - x_1)$

$i = 3 \quad j = 1, 2 \qquad (x_3 - x_1) \qquad (x_3 - x_2)$

$$\circledast = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Verifica: $p_0(x) = 1 + x - x^2$

$p_0(-1) = -1$

$p_0(0) = 1$

$p_0(1) = 1$ ✓

Esercizio con teo. degli orlati

sia $t \in \mathbb{C}$ sia $A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & 1 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix}$

determinare i valori di t t.c.

$rk\,A = 1$

$rk\,A = 2$

$rk\,A = 3$

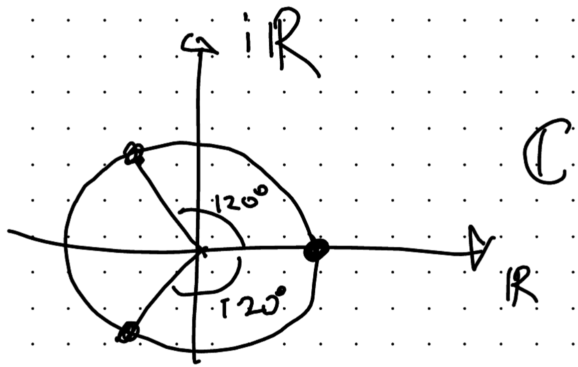
Osservo che $rk\,A \geq 1$ perché $\begin{pmatrix} \boxed{1}^{\neq 0} & t & t^2 \\ t & t^2 & 1 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix}$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & 1 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 0 & 1-t^3 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$= -(1-t^3)\det\begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & 1 \end{pmatrix} = -(1-t^3)^2$$

$$\det A \neq 0 \iff (1-t^3)^2 \neq 0 \iff t^3 \neq 1$$

$$\iff t \notin \left\{ 1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right\} \iff \mathrm{rk}\, A = 3$$



- calcolo 9 determinanti 2x2
- oppure scrivo $t = 1$

$$t = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$t = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

e valuto i determinanti / rango solo in questi casi

Teo orlati:

$rk A \geq 2 \iff \exists$ un minore 2x2 invertibile

$rk A \geq 3 \iff$ " 3x3 invertibile

$rk A = 2 \iff \det A = 0$ e uno dei minori 2x2 è invertibile risposta:

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\operatorname{rk} A = 1 \iff t^3 = 1 \iff t \in \{1, \omega, \omega^2\}$$

$$\operatorname{rk} A = 2 \quad \text{mai}$$

$$\operatorname{rk} A = 3 \iff t^3 \neq 1$$

$$t - t^4 = t(1-t^3) = t(1-1) = 0$$

sono nel caso $t^3 = 1$

$$t - t \cdot t^3 = t - t = 0$$

Forma Parametrica e Cartesiana

Problema: come descrivo un sottospazio di $\mathbb{K}^n$?

1° modo) Forma parametrica:

- $W \subseteq \mathbb{K}^n \qquad W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$
- è come dire che W è un insieme di combinazioni lineari
- è come dire che W è l'immagine di $A = (v_1 | \dots | v_k)$
- è come dire che $W = \operatorname{Im} A = \operatorname{Col}(A)$

2° modo) Forma cartesiana

in $\mathbb{K}^3$ $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{= x} : \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2=0 \end{array} \right\} = U$

$\Updownarrow$

$$Ax = 0$$

dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$U = \ker A$

$U \subseteq \mathbb{K}^n \quad U = \{ x \in \mathbb{K}^n : \ Ax = 0 \}$

per A opportuna

- insieme di vettori che soddisfano equaz. lineari omogenee
- $\ker A$
- ci interessano le righe di A

Come fare a tradurre una forma nell'altra?

Perche moltiplicare solo a sinistra?

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow[S_A]{} \mathbb{K}^m$$

$$A \cdot (\;)$$

---

se moltiplicassi a destra?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$$

Definiamo $\mathbb{K}_n := \mathrm{Mat}_{1 \times n}$

$A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}$ $\quad D_A : \mathbb{K}_m \to \mathbb{K}_n$

cosa vuol dire che $x \in \mathbb{K}_m$ $\quad x \in \ker D_A$?

$$\overbrace{\begin{pmatrix} - & - & - & - \end{pmatrix}}^{x} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\ker D_A$: $(a \ \ b)$:

$$(a \ \ b)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (0 \ \ 0)$$

$$a + 2b = 0 \qquad 2a + 4b = 0$$

$$a = 2 \qquad b = -1$$

$$(2 \ \ -1)$$

è l'elenco dei coeff. di un'equazione sodd. da tutte le colonne di A

F. Parametrica $\longrightarrow$ F. Cartesiana

$$\underbrace{W = \langle A^1, \dots, A^k \rangle}_{\text{f. parametrica}} \longrightarrow A = (A^1 | \dots | A^k)$$

$$\longrightarrow (D_A : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_k) \longrightarrow \ker D_A$$

$\longrightarrow$ calcolo una base di $\ker D_A$: $B_1, \dots, B_h$

ottengo che $B_i A = 0$ $\iff$ $B \cdot A = 0$

quindi B_i sono i coeff. delle equaz. di W

F. Cartesiana $\longrightarrow$ F. Parametrica

W è $\ker B$

$$B_1 x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \hline \vdots \\ \hline B_h \end{pmatrix}$$

$$B_2 x = 0$$

$$\vdots$$

$$\rightarrow \left(S_B : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^h \right) \rightarrow \ker S_B$$

$\rightarrow$ base di $\ker S_B$ $\qquad A^1, \dots, A^k$

sono generatori di W

Esempio:

F. param. $\to$ F. cartesiana

$\mathbb{K}^3$ $\quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\ker D_A \; : \; \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

se traspongo tutto

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

traspongo all'indietro

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

calcolo base di $\ker D_A$

$$\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

traspongo

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \ker = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

traspongo all'indietro

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix} \iff x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$\cancel{F}$ cart. $\rightarrow$ F param.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} = W$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolo base $\ker S_B$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Quante equaz. e quanti generatori al minimo?

$$W \in \mathbb{K}^n$$

se W è in forma param.

$W = \operatorname{Im} A$ allora $\dim W = \operatorname{rk} A$

se invece $W = \ker B$ $\dim W = \dim \ker B$

$$\stackrel{!}{=} n - \operatorname{rk} B$$

quante sono le equazioni al minimo?

$= \operatorname{Rrk}(B)$ "rango riga"

$= \operatorname{rk} B^t$

$$\mathrm{rk}\, D_B = \mathrm{Rrg}(B) = \mathrm{rk}\, B^t \underset{\boxed{!}}{=} \mathrm{rk}\, B = \mathrm{rk}\, S_B$$

numero minimo di equaz. + num. min di geratori $W = n$

$$\ker B = W = \mathrm{Im} A$$

$$\underline{BA = 0}$$