1 Domande, Commenti, Suggerimenti?
(Aggiornare il sito.)

2. <u>Richiami</u>:

3. Algoritmo per trovare eq. parametriche / cartesiane

4. Geometria affine

5. Geometria affine del piano

<u>Piano</u>
<u>del</u>
<u>oggi</u>

Richiami:

I 4 sottospazi fondamentali associati ad una matrice

s.sp. vett.

$\boxed{U = \mathrm{Im}(S_A) = \mathrm{Col}(A)} \subseteq \mathbb{K}^m$

$\boxed{\mathrm{Ker}\, A} \subseteq \mathbb{K}^n$

Eq. param.

$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$U = \boxed{\mathrm{Ker}(D_A)} \subset \mathbb{K}_m = \mathrm{Mat}_{1\times m}$

$\boxed{\mathrm{Im}\, D_A} \subset \mathbb{K}_n = \mathrm{Mat}_{1\times n}$

$U = \{ X \in \mathbb{K}^m \mid Y_i X = 0,\ \forall i = 1, \dots, m - \mathrm{rg} A \}$ Eq. cartesiane.

dove

$\{ Y_1, \dots, Y_{n-\mathrm{rg}(A)} \}$ = base di $\mathrm{Ker} D_A$

$$D_A : \mathbb{K}_m \longrightarrow \mathbb{K}_n$$
$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (x_1, \dots, x_m) A$$

Dato $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset \mathbb{K}^m$

Eq. par. di $U$ : vuol dire trovare una base di $U$.

$A = (v_1 | \dots | v_k) \rightsquigarrow S$ : scala $\Rightarrow$ colonne dominanti.

Eq. cart. di $U$ :

$A = (v_1 | \dots | v_k) \rightsquigarrow$ Trovare una base di $\operatorname{Ker} D_A$.

Poiché $\operatorname{Ker} D_A \simeq \operatorname{Ker} A^t$ :

$$A^t = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \hline \vdots \\ \hline v_k^t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{rref}(A^t) \rightsquigarrow \text{soluzioni-base } \{\cancel{X_1}Y_1, \dots, Y_{m-\operatorname{rg}A}\}$$

Le eq. cart. di $U$ sono
$$\begin{cases} Y_1^t X = 0 \\ Y_2^t X = 0 \\ \vdots \\ Y_{m-\operatorname{rg}A}^t X = 0 \end{cases}$$

Se $\dim V = r$, ci vogliono $m-r$ equazioni.

$$\boxed{\dim V + \#\,\text{equazioni} = m.}$$

$\dim V = 1$, $V \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow 2$ equazioni.

$ax+by+cz=0$ : definisce un sottosp. vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$ $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Es: Trovare eq. parametriche di

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

" è l'insieme delle soluzioni di "

Sol.:

$$U = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

var. libera

Teorema: Sia $U \subseteq \mathbb{K}^n$ un s.sp. vett. di dimensione $k$.
Allora esiste una matrice $C$ con le seguenti proprietà
1) $C \in \mathrm{Mat}_{(n-k)\times n}(\mathbb{K})$
2) $\mathrm{Ker}\, C = U$ [Eq. cart. di $U$]

Inoltre $C$ si trova con il seguente algoritmo
i) Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$ t.c. $U = \mathrm{Col}(A)$
ii) $$(A \mid \mathbb{1}_n) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} S' & B \\ \hline O_{(n-k)\times k} & C \end{array}\right)$$ : a scala.

dim: $\mathrm{rg}\, A = k$ e $A \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$,
Se $S'$ è una forma a scala di $A$, $S' = \left(\begin{array}{c} * \\ \hline O_{(n-k)\times k} \end{array}\right)$

$$(A|\mathbb{1}_n) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} S' & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = (S|B) \Rightarrow \exists\ T \text{ invertibile t.c.}$$

$$T(A|\mathbb{1}_n) = (S|B) \quad \text{ovvero} \quad TA = S,\ T = B.$$

$$TA = S = \left(\frac{S'}{0}\right) \Rightarrow T = \left(\frac{T_1}{T_2}\right), \quad \begin{array}{l} T_1 A = S' \\ T_2 A = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow T_2 = C \in Mat_{(n-k)\times k}(\mathbb{K})$
di rango massimo. $\blacksquare$

$\underline{Es}$: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U: \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(A|\mathbb{1}_n) \rightsquigarrow (A|X)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ 3 & x_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ \hline 0 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & x_3 - 3x_1 \end{array}\right)$$

eq. cartesiane.

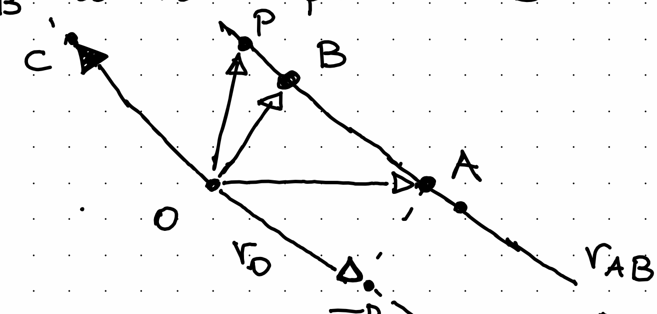
# Sottospazi affini

Dati due sottoinsiemi $U, W \subset V$, dove $V$ è un $\mathbb{K}$-sp. vettoriale, la loro somma è

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Es: $V = \mathcal{V}_O^2$, $A \neq O \neq B \neq A \in \mathcal{E}^2$

Sia $r_{AB}$ la retta per $A$ e $B$




Sia $P \in r_{AB}$. Allora $\vec{OP} - \vec{OA} = \vec{OC}$ è un multiplo di $\vec{OA} - \vec{OB}$ $\Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{OP} - \vec{OA} = t(\vec{OB} - \vec{OA})$

$$\Rightarrow \vec{OP} = \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$\Rightarrow r_{AB} = \{\vec{OA}\} + \langle \vec{OB} - \vec{OA} \rangle = \{\vec{OA}\} + r_O$$

s.sp. vettoriale.

**Def:** Un <u>sottospazio affine</u> di un $\mathbb{K}$-sp. vettoriale $V$ è un sottoinsieme $W \subset V$ della forma

$$W = v + W_0 = \{ v + w \mid w \in W_0 \}$$

dove $v \in V$ e $W_0 \subseteq V$ è un <u>sottospazio vettoriale</u> di $V$.

<u>OSS</u>: 1) Se $v \notin W_0$ allora $W$ non è un s.sp. vettoriale.

Infatti, siano $v + w_1$, $v + w_2 \in W$.

$$\Rightarrow \quad v + w_1 + v + w_2 = 2v + w_1 + w_2 = v + \overbrace{(v + \underbrace{w_1 + w_2}_{\in W_0})}^{\notin W_0 \text{ se } v \notin W_0} \notin W.$$

2) Se $v \in W_0$ allora $W$ è un s.sp. vettoriale.

Infatti, $W = v + W_0 = W_0$.

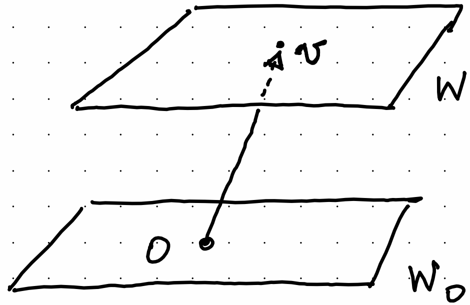
3) $W_0$ è <u>univocamente determinato</u> da $W$: Infatti,

$W = v + W_0 = v' + W_0'$, $W_0, W_0' \subseteq V$ s.sp. vettoriali:

$\forall\, w_0 \in W_0 \ \exists\, w_0' \in W_0'$ t.c. $v + w_0 = v' + w_0' \Rightarrow w_0 = v' - v + w_0' \in W_0'$

$W_0$ si chiama il <u>sottospazio di giacitura</u> di $W$

idea:




La dimensione di un sottospazio affine $W = v + W_0$ è

$$\dim W := \dim W_0 .$$

Se $\dim W = 0$ allora $W$ si chiama punto.

Se $\dim W = 1$ allora $W$ si chiama retta

Se $\dim W = 2$ allora $W$ si chiama piano

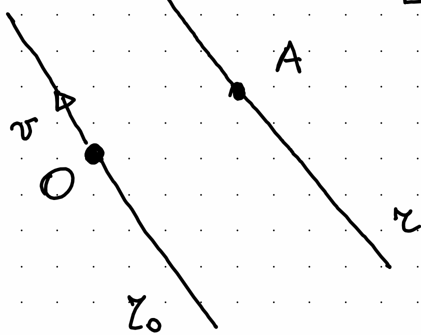
Se $\dim W = \dim V - 1$ allora $W$ si chiama iperpiano.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $W_0$. Allora $v_1, \dots, v_n$ si chiamano vettori direttori di $W$.

# Sottospazi affini del piano $\mathcal{V}_O^2$

- dimensione 0 : $\{\overrightarrow{OP}\}$ (punti)

- dimensione 1 : $r = \overrightarrow{OA} + \underbrace{\langle v \rangle}_{r_0}$ dove $v \neq \overrightarrow{OO}$.

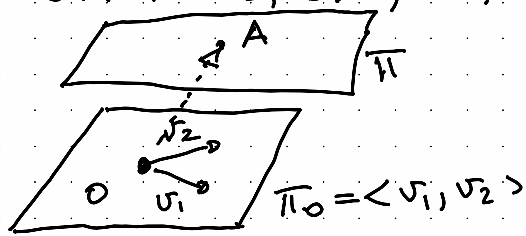



$r_0 = \langle v \rangle$ è l'unica retta parallela ad $r$ e passante per $O$.

- dimensione 2 : $\mathcal{V}_O^2$.

# Sottospazi affini di $\mathcal{V}_O^3$

- punti : $\{\overrightarrow{OP}\}$
- rette : : $\overrightarrow{OA} + \langle v \rangle$ $\quad v \in \mathcal{V}_O^3 \quad v \neq \overrightarrow{OO}$
- piani : $\pi$: $\overrightarrow{OA} + \langle v_1, v_2 \rangle$ , $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_O^3$ lin. ind.




- 3-spazi : $\mathcal{V}_O^3$.

<u>Es</u>: $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 - x_3 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Dimostrare che $W$ è un s.sp. affine, calcolarne la dimensione e trovare dei suoi vettori direttori.

<u>Sol.</u>: Scegliamo $v \in W$, ad esempio $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$.

Sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$.

$$X - v = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad (x_1 - 1) - x_2 - x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad X - v \in \operatorname{Ker}\left( (1, -1, -1) \right) = W_0.$$

$\Rightarrow$ $W = v + W_0$ e quindi $W$ è un s.sp. affine, che ha come sottospazio di giacitura $W_0$ e vettori direttori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$W = v + \langle v_1, v_2 \rangle$ : <u>Eq. parametriche</u>: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W \iff$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

La <u>geometria affine</u> si occupa di studiare la <u>posizione reciproca</u> di sottospazi affini:

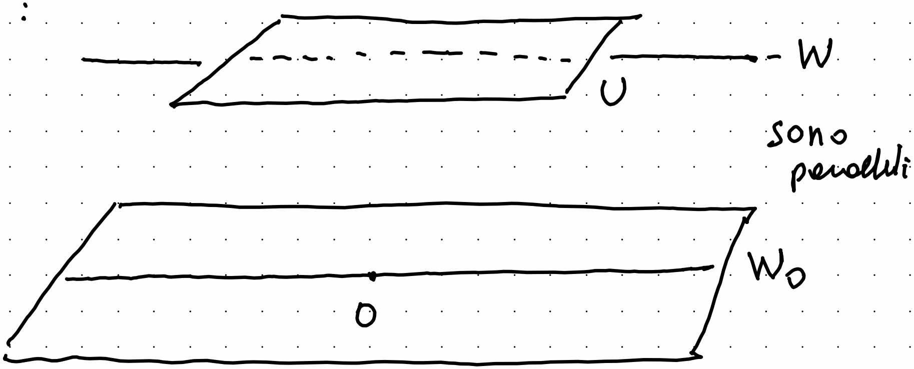
<u>Def:</u> Due <u>sottospazi affini</u>

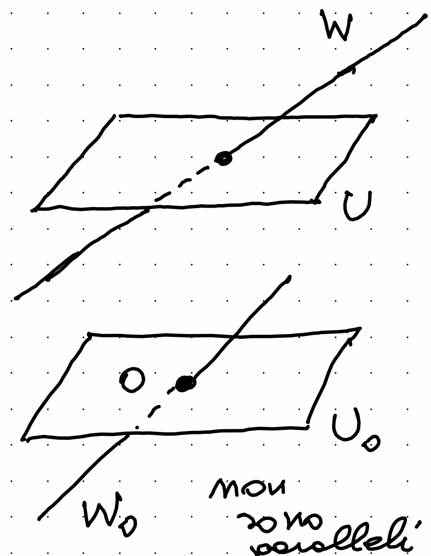
$$U = X_0 + U_0 \ , \quad W = Y_0 + W_0 \quad \subset V$$

si dicono <u>paralleli</u> se

$$U_0 \subseteq W_0 \quad \text{oppure} \quad W_0 \subseteq U_0$$

<u>Es</u>:



Es: Le rette

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

sono parallele.

Es: Il piano $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

e la retta $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$

sono paralleli perché $\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \subsetneq \left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

Problemi da studiare nella geometria affine:
- Intersezione
- Parallelismo

OSS1: Se $v_1, v_2 \in X_0 + U_0 = U$ allora

$$v_1 - v_2 \in U_0$$

OSS2: Se $U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0$ sono paralleli,
diciamo $U_0 \subseteq W_0$, allora

o $\quad U \cap W = \emptyset \quad$ oppure $\quad U \subseteq W$.

OSS3: Se $U : AX = b$, $U \subset \mathbb{K}^n$, $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$,
allora $U$ è un sottospazio affine
con giacitura

$$U_0 = \operatorname{Ker} A.$$

OSS4: Siano $U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0$ due sottospazi affini di $\mathbb{K}^m$ con giaciture $U_0$ e $W_0$, rispettivamente. Allora

1) $U \cap W \neq \emptyset \iff X_0 - Y_0 \in U_0 + W_0$

Infatti, se $v \in U \cap W$ allora $v = X_0 + u = Y_0 + w$, $u \in U_0, w \in W_0$.
allora $X_0 - Y_0 = w - u \in U_0 + W_0$.
Viceversa, se $X_0 - Y_0 = u + w \in U_0 + W_0$ allora

$$X_0 - u = Y_0 + w \in U \cap W \implies U \cap W \neq \emptyset.$$

2) Due possibilità per $U \cap W$:
o $U \cap W = \emptyset$ oppure è un sottospazio affine con giacitura $U_0 \cap W_0$.

Infatti, $U : AX = b$ e $W : CX = d$. Allora

$U \cap W : \begin{cases} AX = b \\ CX = d \end{cases}$. Le soluzioni sono $X_0 + \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = X_0 + \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} C$.

# Problemi di geometria affine

Dati due s.sp. affini $U, W \subset V$

capire se ·) si intersecano

·) In questo caso descrivere l'intersezione (che è un s.sp. affine)

·) Sono paralleli ?