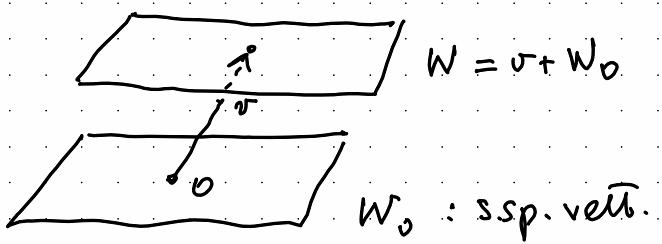
Geometria affine del piano

"Geometria affine" è un ossimoro.

- intersezione
- parallelismo

} di sottospazi affini.

Richiami: s.sp. affine $= v + W_0$ è il traslato di un sottosp. vettoriale W_0.



$$(v+W_0) \cap (u+U_0) = \begin{cases} \emptyset \\ w + U_0 \cap W_0 \quad \text{se} \quad v-u \in W_0 + U_0 \end{cases}$$

Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbb{K}^n$

Sia $U = X_0 + U_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ ~~un~~ sottospazio affine con giacitura U_0 e passante per $X_0 \in \mathbb{K}^n$.

Le equazioni parametriche di U sono

$$U = X_0 + \langle v_1, \dots, v_r \rangle \quad \text{dove } \{v_1, \dots, v_r\} \text{ è una base di } U_0.$$

Es:

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{= U_0}$$

: eq. parametriche del piano U di $\mathbb{R}^3$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U \iff \exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 = 1 + 2t_1 + t_2 \\ x_3 = 1 + t_1 \end{cases} \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Le <u>equazioni cartesiane</u> di $U = X_0 + U_0$ consistono nel descrivere U come l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari:

Se $U_0 = \mathrm{Ker}\, C$ (Eq. cart. di U_0) allora

$$U = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid CX = CX_0 \}.$$

e scriviamo

$$U : \quad CX = CX_0.$$

<u>dim</u>: Sia $u \in U$. Allora $\exists\, v \in U_0$ t.c. $u = X_0 + v$.

Quindi $Cu = C(X_0 + v) = CX_0 + Cv = CX_0$

Quindi u è soluzione del sistema $CX = CX_0$.

Viceversa, se u è soluzione di $CX = CX_0$ allora

$Cu = CX_0$ quindi $C(u - X_0) = 0 \Rightarrow u - X_0 \in \mathrm{Ker}\, C$

$\Rightarrow \quad u = X_0 + (u - X_0) \in X_0 + U_0 = U$

$\blacksquare$

Es: $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

Trovare le eq. cartesiane di U.

Sol.: 1) Troviamo le eq. cartesiane di $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$.

a) $\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ 3 & x_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ \hline 0 & x_2-2x_1 \\ 0 & x_3-3x_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow U_0 : \begin{cases} x_2-2x_1=0 \\ x_3-3x_1=0 \end{cases}$

Dominante

b) $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow U_0 : \begin{cases} -2x_1+x_2=0 \\ -3x_1+x_3=0 \end{cases}$

2) • $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad CX_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$U : \begin{cases} -2x_1+x_2=-1 \\ -3x_1+x_3=-2 \end{cases} \quad : CX=CX_0.$

Es: Trovare le equazioni cartesiane di

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 2 & -1 & x_1 \\ 2 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -3 & x_1-2x_2 \\ 0 & 0 & x_3-2x_2 \\ 0 & 2 & x_4-x_2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -3 & x_1-2x_2 \\ 0 & 0 & x_3-2x_2 \\ 0 & -1 & x_4-3x_2+x_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1-2x_2-3x_4+9x_2-3x_1 \\ 0 & 0 & x_3-2x_2 \\ 0 & -1 & x_4+x_2-x_1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & -2x_1+7x_2-3x_4 \\ 0 & 0 & x_3-2x_2 \end{array}\right) \rightsquigarrow U_0 : \begin{cases} -2x_1+7x_2-3x_4 = 0 \\ x_3-2x_2 = 0 \end{cases}$$

Verifichiamo..

$$\Rightarrow \quad U : \begin{cases} -2x_1+7x_2-3x_4 = 9 \\ x_3-2x_2 = -5 \end{cases}$$

Es: Trovare le equazioni cartesiane di

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

Sol.:

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7/3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2 & 7/3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad U_0 : \begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad U : \begin{cases} -2x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_4 = -9 \end{cases}$$

Geometria affine di $\mathbb{K}^2$.

I sottospazi affini di $\mathbb{K}^2$ sono

- punti: $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Eq. par.

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$ Eq. cartesiana.

- rette: $r = X_0 + \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle$ con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  la forma cartesiana di r è:

$$-bx + ay = c \quad \text{dove} \quad c = (-b, a) X_0$$

Infatti, $\operatorname{Ker}(a, b) = \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad (a, b) \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0$

Es: Un'eq. cartesiana di $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ è

$$-3x + 2y = 1$$

Una retta r di $\mathbb{K}^2$ è l'insieme delle soluzioni di una sola equazione lineare:

$$r: \quad ax+by=c \qquad (a,b)\neq(0,0).$$

Le sue equazioni parametriche sono

$$r = X_0 + \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ è il vettore direttore di r.

Es:

$$r: \quad 2x+3y=1 \Rightarrow r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

sol. di $2x+3y=0$

Condizioni di parallelismo

- Due rette in forma parametrica

$$r = X_0 + \langle v \rangle \quad , \quad s = Y_0 + \langle w \rangle$$

sono parallele se e solo se $rg\,(v|w) = 1$

- Due rette

$$r: \ ax+by=c \quad e \quad s = Y_0 + \langle w \rangle$$

sono parallele se e solo se w è soluzione di $ax+by=0$

- Due rette

$$r: \ ax+by=c \quad e \quad s: \ a'x+b'y=c'$$

sono parallele se e solo se le equazioni omogenee

$$ax+by=0 \quad e \quad a'x+b'y=0$$

hanno le stesse soluzioni $\Leftrightarrow$ $Ker\,(a,b) = Ker\,(a',b')$

$\Leftrightarrow$ $rg \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ $\underset{\substack{(a,b)\neq(0,0) \\ (a',b')\neq(0,0)}}{\Leftrightarrow}$ $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$

Condizioni di incidenza di due rette di $\mathbb{K}^2$

·) Date rette <u>in forma parametrica</u>

$$r = X_0 + \langle v \rangle \quad e \quad s = Y_0 + \langle w \rangle$$

si intersecano se e solo se $X_0 - Y_0 \in \langle v, w \rangle = \langle v \rangle + \langle w \rangle$

se e solo se il sistema con matrice completa

$$(v\ w \mid X_0 - Y_0) \quad \text{è risolubile}$$

se e solo se $\quad rg(v|w) = rg(v\ w \mid X_0 - Y_0)$

In questo caso ci sono due possibilità:

1) $rg(v|w) = rg(v\ w \mid X_0 - Y_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad r \equiv s$ sono coincidenti

2) $rg(v|w) = rg(v\ w \mid X_0 - Y_0) = 2 \quad \Rightarrow \quad r \cap s = \{P_0\}$

rette incidenti in un punto.

$P_0 = ?$

$\ker(v\ w) = \{0\}_{\mathbb{K}^2}$

Sia $\binom{t_1}{t_2}$ l'<u>unica</u> soluzione di $(v\ w)X = X_0 - Y_0$ ovvero

$$t_1 v + t_2 w = X_0 - Y_0 \quad \Rightarrow \quad X_0 - t_1 v = Y_0 + t_2 w = P_0 .$$

$\underline{\text{Es}}$: $\quad r = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \right\rangle \qquad s = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$.

Trovare la loro posizione reciproca.

$\underline{\text{Sol.}}$: $\det \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ r ed s non sono parallele.

e quindi si intersecano in un unico punto

$$P_0 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - t_2 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}t_1\\-t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}t_1\\-t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = -3 \quad , \quad t_2 = -4 \quad \Rightarrow$$

$$P_0 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} .$$

Due rette

$r: \; ax+by=c \quad$ e $\quad s = X_0 + \langle v \rangle$

si intersecano se e solo se $\exists\, t \in \mathbb{K}$ t.c. X_0+tv è soluzione di $ax+by=c$.

Posto $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

$r \cap s \neq \emptyset \iff \exists\, t \in \mathbb{K}$ t.c. $a(x_0+th)+b(y_0+tk)=c$

$\iff \exists\, t \in \mathbb{K}$ t.c. $t(ah+bk) = c-ax_0-by_0$

Ci sono 3 possibilità:

1) $ah+bk=0=c-ax_0-by_0 \implies r \equiv s$ coincidono

2) $ah+bk \neq 0 \implies \exists!\, t = \dfrac{c-ax_0-by_0}{ah+bk}$ e quindi

$$r \cap s = \{P_0\} \quad \text{con} \quad P_0 = X_0 + \frac{c-ax_0-by_0}{ah+bk}\, v$$

3) $ah+bk=0$ e $c-ax_0-by_0 \neq 0 \implies r \cap s = \emptyset$

(oss: in 3) r ed s sono parallele perché v è soluzione di $ax+by=0$).

Es: Trovare la posizione reciproca di

$r: 2x+3y=-1 \quad , \quad s = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\rangle \quad \subset \mathbb{R}^2$

Sol.:

$v = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ è soluzione di $2x+3y=0$? NO

$\Rightarrow$ Quindi r ed s non sono parallele.

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in s \cap r \iff$$

$$2(1+2t)+3(1+t) = -1$$

$$\iff t(4+3) = -1-5 \iff 7t = -6$$

$$\iff t = -\frac{6}{7}$$

Quindi

$r \cap s = \{P_0\}$ con $P_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{6}{7}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/7\\1/7\end{pmatrix}$

<u>Es</u>: Trovare la pos. reciproca di

$r: \ 2x+3y=-1 \quad e \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^2$

<u>Sol.</u>

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ è soluzione di $2x+3y=0$? si

$\Rightarrow$ r ed s sono parallele.

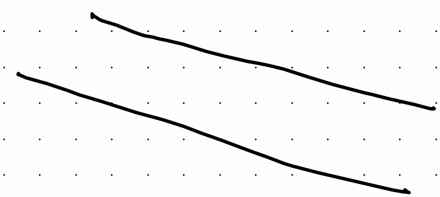
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \in r \iff$

$2(1+t)+3\left(1-\frac{2}{3}t\right) = -1 \iff t(0) = -6$

non ha soluzione e quindi

r ed s sono parallele non coincidenti.

Fare un disegno ...



Due rette in forma cartesiana

$r: ax+by=c \quad , \quad s: a'x+b'y=c'$

si intersecano se e solo il sistema

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

ha soluzione $\iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right) = r$

3 possibilità:

1) $r = 1 \implies r \equiv s$

2) $r = 2 \implies r \cap s = \{P_0\}$, $P_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$

3) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ e $\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right) = 2 \implies r \cap s = \emptyset$ e sono parallele.

Fascio di rette per un punto

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$.

Una retta $r: ax+by=c$ contiene P_0 se e solo se

$$ax_0 + by_0 = c$$

Il fascio di rette per P_0 è

$$\mathcal{F}_{P_0} = \{ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \mid (a,b) \neq (0,0) \}$$

Es: $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a(x-1)+b(y-1)=0 \qquad (a,b)=(0,0).$

Le eq. par. delle rette per P_0:

$$r: P_0 + \langle v \rangle \qquad v \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0_{\mathbb{K}^2}\}.$$

Retta per due punti

Siano $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ due punti distinti di $\mathbb{K}^2$.

Com'è fatta la retta per P_0 e P_1? $r: ax+by=0$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

imponiamo il passaggio per P_1:

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=0$$

ad es. $(a,b) = (-(y_1-y_0), x_1-x_0)$

$$r: \quad (y_1-y_0)(x-x_0) = (x_1-x_0)(y-y_0)$$

Se $y_1 \neq y_0$ e $x_1 \neq x_0$ possiamo riscriverla come

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$