Geometria Affine
su $\mathbb{R}^2$

Un sottosp. affine di V è

- traslazione di un ssp. vett.
- insieme di soluzioni di un sistema lineare (purché ci sia soluzione)

Una retta è ssp. aff. di dimensione 1

$r: \quad X_0 + \langle v_1 \rangle$

$: \quad ax + by = c \quad \longleftrightarrow \quad (A|c)$

$A = (a \ b)$

giacitura

$\langle v_1 \rangle$

$(A|0)$

Calcolare retta per 2 punti

$P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ f. param.

$P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle$ (se $P_1 \neq P_2$)

f. cartesiana

$$\frac{x - x_{P_1}}{x_{P_2} - x_{P_1}} = \frac{y - y_{P_1}}{y_{P_2} - y_{P_1}}$$

Rette parallele

2 sottsp. aff. sono paralleli

se le giaciture sono una contenuta nell'altra

$x_0 + \langle v_1 \rangle \longrightarrow x_1 + \langle v_1 \rangle$ al variare di x_1

$(A \mid b) \longrightarrow (A \mid b')$ al variare di b'

Fascio improprio di rette

Oss:

$$ax + by = c$$

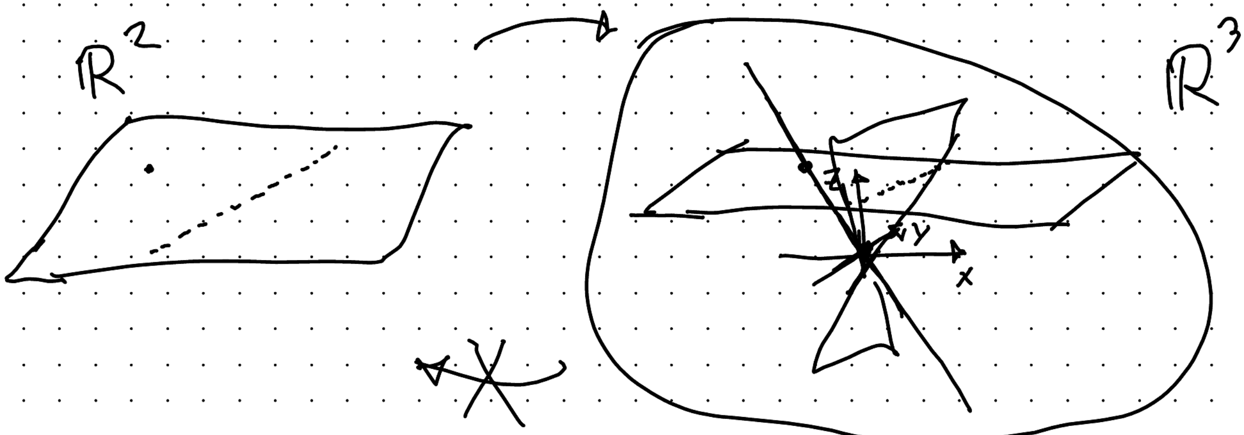
$$ax + by - c = 0$$

$$a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} - c = 0$$

$$ax + by - cz = 0$$

posso scrivere un sistema omogeneo aggiungendo una variabile

per tornare indietro pongo $z = 1$



C'è quasi una corrispondenza

fra ssp. aff. di $\mathbb{R}^2$ e ssp. vett. di $\mathbb{R}^3$

$$\longrightarrow$$

$$\xleftarrow{?}$$

Quando 3 punti sono allineati?

P_1, P_2, P_3

traslo

$0, P_2-P_1, P_3-P_1$

sono allineati $\iff rk(P_2-P_1 \mid P_3-P_1) \leq 1$

< 2

$\Updownarrow$

$\det(P_2-P_1 \mid P_3-P_1) = 0$

$\shortparallel$

se li guardo in $\mathbb{R}^3$

$\left\langle \begin{pmatrix} P_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} P_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} P_3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\det\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

In effetti: P_1, P_2, P_3 sono allineati

$\iff$ l'area del $\overset{\triangle}{P_1 P_2 P_3}$ è 0

$$\iff \frac{1}{2}\left|\det(P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1)\right| = 0$$

$$\iff \det(P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1) = 0$$

3 rette

Posizione reciproca

classifico la situazione indipendentemente

- dalla traslazione
- dal "cambio di sistema di riferimento"

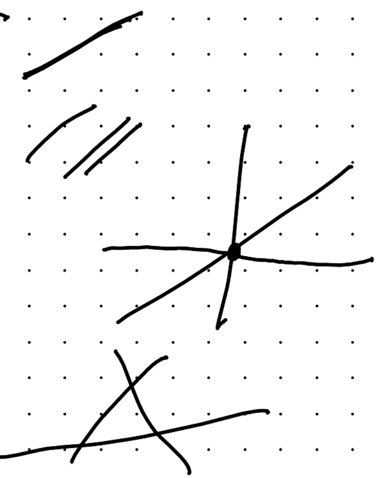
cambio di coordinate

nelle giaciture non cambia il rango complessivo

nelle giaciture + termini noti: "

$(A_1 \mid b_1)$ $(A_2 \mid b_2)$ $(A_3 \mid b_3)$

	giaciture $rk\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline A_3 \end{pmatrix}$	giaciture + termini noti $rk\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \\ A_3 & b_3 \end{pmatrix}$
coincidono	1	1
parallele non coinc.	1	2
concorrenti	2	2
posiz. generica	2	3



Geometria affine di $\mathbb{R}^3$

Sottosp. aff. di $\mathbb{R}^3$

$\dim = 0 \quad =:$ punto

$\dim = 1 \quad =:$ retta

$\dim = 2 \quad =:$ piano

Forma Parametrica

punto $\quad p_1 \in \mathbb{R}^3$

Forma Cartesiana

$(A \mid b)$

dove $\operatorname{rk} A = 3$, $\operatorname{rk}(A|b) = 3$

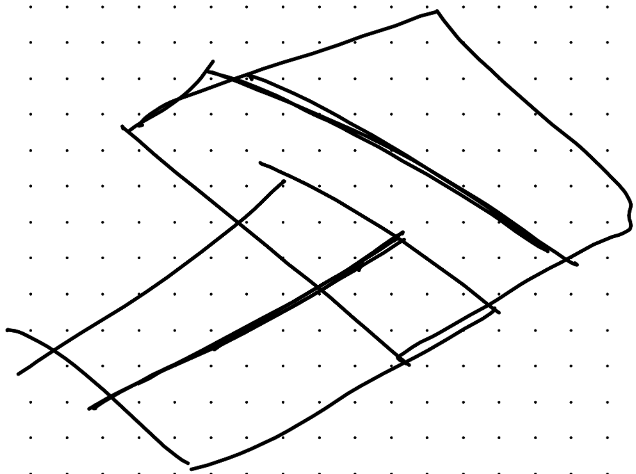
deve esserci una soluzione

	Parametrica	Cartesiana
retta	$x_0 + \langle v_1 \rangle$ $x_0, v_1 \in \mathbb{R}^3$ $v_1 \neq 0$, $rk(v_1) = 1$	$(A \mid b)$ con $rk A = 2$ $rk(A \mid b) = 2$
piano	$x_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$ $rk(v_1 \mid v_2) = 2$	$(A \mid b)$ con $rk A = 1$ $rk(A \mid b) = 1$

Posizione reciproca di 2 rette in $\mathbb{R}^3$

le 2 rette r_1, r_2 possono appartenere ad uno stesso piano $\begin{cases} \text{parallele} \\ \text{incidenti} \end{cases}$

oppure no : sghembe



In forma parametrica

$r_1 : X_0 + \langle v_1 \rangle$ $\qquad$ $r_2 : X_1 + \langle v_2 \rangle$

sono $r_1 \parallel r_2 \iff \langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$ è l'unica condizione

$\dim \langle v_1, v_2 \rangle = 1$

sono $r_1 \cap r_2 \neq 0 \iff \dim \langle v_1, v_2 \rangle = 2$

$r_1 \neq r_2$

$$\exists\, t, t' \in \mathbb{R} \quad X_0 + t v_1 = X_1 + t' v_2$$

$$t v_1 - t' v_2 = X_1 - X_0$$

$$(v_1 \mid v_2)\begin{pmatrix} t \\ -t' \end{pmatrix} = X_1 - X_0$$

$(v_1 \mid v_2 \mid X_1 - X_0)$ deve avere soluzione rette sghembe: $\langle v_1 \rangle \neq \langle v_2 \rangle$

$\dim\langle v_1, v_2 \rangle = 2$

e non devo avere intersezioni

$(v_1 | v_2 | x_0 - x_1)$ non deve avere soluzione

	giaciture	giaciture + termini noti
	$rk(v_1 \| v_2)$	$rk(v_1 \| v_2 \| x_0 - x_1)$
parallele	1	1, 2
incidenti	2	2
sghembe	2	3

$2 \rightarrow$ // non coincidenti

$1 \rightarrow$ rette coincidenti

in forma r_1 parametrica $\quad X_0 + \langle v_1 \rangle$

r_2 cartesiana $\quad (A \mid b)$ con $rk A = 2$

$A \in Mat_{2\times 3}$

Oss preliminare:

la posizione reciproca non deve cambiare se traslo tutto

traslo di $-X_0$:

$r_1 - X_0 : \quad \langle v_1 \rangle$

$r_2 - X_0 : \quad (A \mid b - AX_0)$

$r_2 = \{x : Ax = b\}$

$r_2 - X_0 = \{x - X_0 : Ax = b\} = \{y : Ay = b - AX_0\}$

$= \{y : A(y + X_0) = b\}$

$r_1: \langle v_1 \rangle$ $\qquad$ $r_2: (A \mid b - Ax_0)$

coincidenti: $\langle v_1 \rangle = \ker A$ $\qquad$ $b - Ax_0 = 0$

$\iff Av_1 = 0$

parallele: $Av_1 = 0$

incidenti: $Av_1 \neq 0$

tv_1 deve essere soluzone di $Ax = b - Ax_0$

$\iff tAv_1 = b - Ax_0$

$b - Ax_0 \in \langle Av_1 \rangle$

sghembe: $Av_1 \neq 0$ e $b - Ax_0 \notin \langle Av_1 \rangle$

	giaciture	giacit. + termini not:
	$rk(A\ v_1)$	$rk(A\ v_1 \mid b - AX_0)$
coinc.		
parall		
incid.		
sghembe		

Posizione reciproca di retta r e piano π

$r : (A_1 | b_1)$ con $rk A_1 = rk(A_1 | b_1) = 2$

$A_1 \in Mat_{2 \times 3}$

$\pi : (A_2 | b_2)$ con $rk A_2 = 1$

$A_2 \in Mat_{1 \times 3}$

$r \parallel \pi$ $\qquad$ $giac(r) \subseteq giac(\pi)$

$\ker A_1 \subseteq \ker A_2$

$A_1 x = 0 \Rightarrow A_2 x = 0$

$rk\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = 2$

l'alternativa è "r è incidente a π"

$$\iff \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 3$$

Abbiamo 3 casi

giaciture	giaciture + noti
$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$	$\mathrm{rk}\left(\begin{array}{c\|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right)$

$r \subseteq \pi$

$r \parallel \pi \quad r \cap \pi = \emptyset$

$r \not\parallel \pi$ incidente

Vogliamo parametrizzare tutti i piani contenenti una retta $r : (A_1 | b_1)$ con $rk A_1 = 2$

$A_1 \in Mat_{2\times 3}$

"Fascio di piani per r"

Dobbiamo scegliere $A_2 \in Mat_{1\times 3}$ t.c. $rk \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix} = 2$

$\Longleftrightarrow \quad A_2 = \lambda (A_1)_1 + \mu (A_1)_2$

$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right)$ deve essere un sistema con soluzione

$(\lambda \ \mu \ -1) \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0)$

$(\lambda \ \mu \ -1) \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{array}\right) = \left(0 \ 0 \ 0 \,\middle|\, \begin{array}{c} (\lambda \ \mu) b_1 \\ - b_2 \end{array}\right)$

$(\lambda \ \mu \ -1) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$

$$r: \quad \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z - b = 0 \\ \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z - \beta = 0 \end{cases}$$

fascio di π per r: $\lambda(a_1 x + a_2 y + a_3 z - b) + \mu(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z - \beta) = 0$

(λ, μ non entrambi nulli)