Spazi Euclidei

- Spazi vettoriali in cui possiamo misurare distanze tra vettori ed angoli.

- Dipende dalla scelta di un "metro".

- Scegliere una f.ne distanza.

- Scegliere una distanza dipende dalla scelta di una

  Forma bilineare.

Forme bilineari:

Siano V_1, V_2 e V_3 3 spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
Una funzione

$$b: V_1 \times V_2 \longrightarrow V_3$$

si dice bilineare se

·) $b(-, v_2): V_1 \longrightarrow V_3$ è lineare $\forall v_2 \in V_2$

·) $b(v_1, -): V_2 \longrightarrow V_3$ è lineare $\forall v_1 \in V_1$

ovvero: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall u, v \in V_1$ $\forall u', v' \in V_2$, $\forall v_1 \in V_1$ $\forall v_2 \in V_2$

$$b(\alpha u + \beta v, v_2) = \alpha\, b(u, v_2) + \beta\, b(v, v_2)$$

$$b(v_1, \alpha u' + \beta v') = \alpha\, b(v_1, u') + \beta\, b(v_1, v').$$

Se $V_1 = V_2 = V$ e $V_3 = \mathbb{K}$ allora b si chiama una forma bilineare. $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

Es: Sia $V = \mathbb{K}^n$ e sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Definiamo

$$b_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

come $b_A(X,Y) = X^t A Y$: La forma bilineare associata alla matrice A

b_A è <u>bilineare</u>:

$$b_A(\alpha X + \beta X', Y) = (\alpha X + \beta X')^t A Y \overset{(\ )^t \text{ è lineare}}{=} (\alpha X^t + \beta X'^t) A Y$$

$$= \alpha X^t A Y + \beta X'^t A Y =$$

$$= \alpha\, b_A(X,Y) + \beta\, b_A(X',Y)$$

$$b_A(X, \alpha Y + \beta Y') = X^t A (\alpha Y + \beta Y') =$$

$$= \alpha X^t A Y + \beta X^t A Y' =$$

$$= \alpha\, b_A(X,Y) + \beta\, b_A(X,Y')$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$b_A(X,Y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 (y_1 + 2y_2) + x_2 (3y_1 + 4y_2)$$

$$= x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3 x_2 y_1 + 4 x_2 y_2$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} \, x_i \, y_j$$

Vale in generale (Esercizio): Data $A = (a_{ij}) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$,

$$\boxed{b_A(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \, x_i \, y_j}$$

dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

OSS: $a_{ij} = b_A(e_i, e_j)$.

Matrice associata ad una forma bilineare in una base

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare su V.

Allora, $\forall v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \in V$

$$
\begin{aligned}
b(v, w) &= b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i , \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \, b\left(v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, b(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, b(v_i, v_j)
\end{aligned}
$$

Definiamo la matrice

$$\boxed{A_{b,\mathcal{B}} = \big(b(v_i, v_j) \big)_{i,j=1,\dots,n}.}$$

: La matrice che rappresenta (o associata) b nella base $\mathcal{B}$.

$$b(v,w) = b_{A_{b,\mathcal{B}}}(F_{\mathcal{B}}(v), F_{\mathcal{B}}(w))$$

$$= X^t A_{b,\mathcal{B}} Y \qquad \text{dove} \quad X = F_{\mathcal{B}}(v) \quad Y = F_{\mathcal{B}}(w).$$

Forme bilineari su $\mathbb{K}^n$:

Sia $b : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare su $\mathbb{K}^n$, allora

$$b(X,Y) = X^t A_b Y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

dove

$$A_b = A_{b,\mathcal{B}} = \left(b(e_i, e_j) \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Es: Sia $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b(X,Y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$$

Allora

$$b(X,Y) = X^t A Y \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es: Sia $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b(X,Y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_3$$

è bilineare,

$$b(X,Y) = X^t A Y \;, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es: $\det: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ è bilineare.

$$\det\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc = (a, c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$\det = b_A \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come cambia la matrice associata a b quando si cambia base?

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia

$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ un'altra base di V.

Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare.

$$b(v,w) = F_{\mathcal{B}}(v)^t A_{b,\mathcal{B}} F_{\mathcal{B}}(w) = F_{\mathcal{B}'}(v)^t A_{b,\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'}(w)$$

Come sono legate $A_{b,\mathcal{B}}$ e $A_{b,\mathcal{B}'}$?

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Sia B la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Allora

$$F_{\mathcal{B}'} = B F_{\mathcal{B}}.$$

$$b(v,w) = F_{\mathcal{B}'}(v)^t A_{b,\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'}(w)$$

$$= \left(B F_{\mathcal{B}}(v)\right)^t A_{b,\mathcal{B}'} \left(B F_{\mathcal{B}}(w)\right)$$

$$= F_{\mathcal{B}}(v)^t B^t A_{b,\mathcal{B}'} B F_{\mathcal{B}}(w)$$

Ma

$$b(v,w) = F_{\mathcal{B}}(v)^t \underbrace{A_{b,\mathcal{B}}} F_{\mathcal{B}}(w) = F_{\mathcal{B}}(v)^t \underbrace{B^t A_{b,\mathcal{B}'} B} F_{\mathcal{B}}(w)$$

$\forall v, w \in V$

Otteniamo

$$\boxed{A_{b,\mathcal{B}} = B^t A_{b,\mathcal{B}'} B}$$

<u>Def</u>: Due matrici $A, A' \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono <u>congruenti</u> se $\exists\, B$ invertibile t.c.

$$A = B^t A' B.$$

Notiamo la differenza con le applicazioni lineari:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"'] & V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\
\mathbb{K}^n & \mathbb{K}^n \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

La matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{B}'$ è

$$BAB^{-1} = A'$$

A' ed A si dicono <u>coniugate</u> o <u>simili</u>.

Es: Sia $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$b(X,Y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Sia

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Trovare la matrice che rappresenta b nella base $\mathcal{B}$.

Sol.: $b(X,Y) = X^t A Y$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_{b,\mathcal{E}}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{E}}"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$.

$$b(X,Y) = X^t A Y = (B F_{\mathcal{B}}(X))^t A (B F_{\mathcal{B}}(Y)) =$$

$= F_{\mathcal{B}}(X)^t B^t A B F_{\mathcal{B}}(Y)$. La matrice cercata è

$$B^t A B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es: $b(X,Y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$b(X,Y) = X^t A Y \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^t A B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Posto $Z = F_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $T = F_{\mathcal{B}}(Y) = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

$$b(X,Y) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = 6 z_1 t_1 - 2 z_2 t_2.$$

Forme bilineari simmetriche

Una forma bilineare $b: V \times V \to \mathbb{K}$ su V si dice <u>simmetrica</u> se

$$b(v,w) = b(w,v) \qquad \forall v,w \in V.$$

<u>OSS</u>: $b_A(X,Y) = X^t A Y$ è simmetrica se e solo se $A = A^t$ (A è simmetrica).

Infatti,

(sono numeri!)

$$b_A(Y,X) = Y^t A X = (Y^t A X)^t = X^t A^t Y$$

Quindi

$$b_A(Y,X) = b_{A^t}(X,Y) = b_A(X,Y) \iff A = A^t$$

<u>Es</u>: $b_A(X,Y)$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è simmetrica

$b_A(X,Y)$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è simmetrica.

Esempi di funzioni bilineari simmetriche

- $b_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ con $A = A^t$

In particolare,

- $b_{\mathbb{1}_n} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$: $b_{\mathbb{1}_n}(X, Y) = X^t Y$

è la forma bilineare simmetrica standard di $\mathbb{K}^n$.

<u>Notazione</u> :

$b_{\mathbb{1}_n}(X, Y) =: X \cdot Y$ "X scalar Y" = "X puntino Y"
= "dot product".

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

•) $V = \mathbb{K}[x]_{\leq n}$. Fissiamo $n+1$ numeri $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$
[distinti ($t_i \neq t_j$), ad esempio $0, 1, 2, \dots, n$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).]

Definiamo

$$b_{t_0, t_1, \dots, t_n} : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$b_{t_0, t_1, \dots, t_n}(p(x), q(x)) =$$

$$= p(t_0)q(t_0) + p(t_1)q(t_1) + \dots + p(t_n)q(t_n)$$

è bilineare e simmetrica. (Esercizio!)

Es: $b_{0,1}(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$

$$b_{0,1}(1+x, 1+x+x^2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

•) $V = \mathbb{R}^{[-\pi,\pi]} = \{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \mid \text{continue} \}$.

Definiamo il prodotto L^2 :

$$(-|-) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

è bilineare e simmetrica.

<u>OSS</u>:

$$(f|f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = 0 \iff f = 0$$

Basi ortogonali

Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una f-ne bilineare simmetrica su uno $\mathbb{K}$-sp. vett. f.g. V.

Una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice <u>ortogonale</u> se

$$b(v_i, v_j) = 0 \qquad \forall\, i \neq j.$$

Due vettori $v, w \in V$ si dicono <u>ortogonali</u> se

$$b(v, w) = 0.$$

<u>Es</u>: $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n$ è ortogonale rispetto a $b_{\mathbb{1}_n}$:

$$e_i \cdot e_j = e_i^t e_j = 0 \quad \text{se } i \neq j.$$

$$(1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Se $A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ allora $b_A(e_1, e_n) = 1 \Rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ non è ortogonale rispetto a b_A.

Nucleo di una forma bilineare simmetrica

Sia $b: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare e simmetrica su V. Il <u>nucleo</u> di b è

$$\operatorname{Ker} b = \{ v \in V \mid b(v, w) = 0 \quad \forall w \in V \}$$

$= \{$vettori ortogonali a tutti i vettori, rispetto a $b\}$.

<u>OSS</u>: $\operatorname{Ker} b \subset V$ è un sottospazio vettoriale.

<u>OSS</u>: $\operatorname{Ker} b_A = \operatorname{Ker} A$. (se $A = A^t$).

Teorema di Sylvester (della segnatura)

Sia $b: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di (V, b).
Ordiniamo gli elementi di $\mathcal{B}$ come segue:

$$\mathcal{B}^+ = \{v_1, \dots, v_p\} = \{v_i \in \mathcal{B} \mid b(v_i, v_i) > 0\} \qquad |\mathcal{B}^+| = p$$

$$\mathcal{B}^- = \{v_{p+1}, \dots, v_{p+q}\} = \{v_i \in \mathcal{B} \mid b(v_i, v_i) < 0\} \qquad |\mathcal{B}^-| = q$$

$$\mathcal{B}^0 = \{v_{p+q+1}, \dots, v_n\} = \{v_i \in \mathcal{B} \mid b(v_i, v_i) = 0\} \qquad |\mathcal{B}^0| = n-p-q$$

Data un'altra base ortogonale $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$,
allora
$$|\mathcal{B}^+| = |\mathcal{C}^+| = p$$
$$|\mathcal{B}^-| = |\mathcal{C}^-| = q$$
$$|\mathcal{B}^0| = |\mathcal{C}^0| = n-p-q.$$

La coppia (p, q) si chiama la segnatura di b.