Domande / Commenti / Suggerimenti ? Teorema di Sylvester.

- Basi ortogonali

Richiami: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$ una forma bilineare su V.

b si dice simmetrica se $b(v,w) = b(w,v) \quad \forall v, w \in V$.

Il nucleo di una funzione bilineare simmetrica b è

$$\operatorname{Ker}(b) = \{ v \in V \mid b(v,w) = 0 \quad \forall w \in V \}$$

$b(v,w) \in \mathbb{K}$ si chiama anche il valore ottenuto scontrando v e w.

oss: $\operatorname{Ker} b$ è un sottospazio vettoriale di V.

La dimensione di $\operatorname{Ker} b$ si chiama la nullità della forma bilineare b.

Esempio: Sia $A = A^t \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice simmetrica quadrata. Consideriamo la forma bilineare $b_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ su $\mathbb{K}^n$ associata ad A, i.e.

$$b_A(X, Y) = X^t A Y \in \mathbb{K}$$

Allora

$$\operatorname{Ker} b_A = \operatorname{Ker} A.$$

Infatti, se $X \in \operatorname{Ker} b_A$ allora $X^t A Y = 0 \quad \forall Y \in \mathbb{K}^n$.

In particolare, $X^t A e_i = 0 \quad \forall i = 1, .., n$. Quindi

$$X^t A^i = 0 \quad \forall i = 1, .., n$$

$$\Rightarrow \quad X^t A = 0_{1\times n} \quad \Rightarrow \quad D_A(X^t) = 0_{1\times n}$$

$$\Rightarrow \quad X^t \in \operatorname{Ker} D_A \quad \Rightarrow \quad X \in \operatorname{Ker} A^t \underset{\uparrow A = A^t}{=} \operatorname{Ker} A$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker} b \subseteq \operatorname{Ker} A$. Viceversa se $X \in \operatorname{Ker} A$ allora $X^t A Y \overset{!}{=} Y^t A^t X = Y^t A X = 0$. e quindi $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} b$.

Due vettori v e $w \in V$ si dicono <u>ortogonali</u> rispetto a b, se

$$\boxed{b(v,w) = 0} \overset{def}{\Longleftrightarrow} v \perp w$$

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b_A(X,Y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$

è una forma bilineare su $\mathbb{K}^2$.

$b_A(e_1, e_1) = 0$ $\quad$ e_1 è ortogonale a se stesso

Un vettore v t.c. $b(v,v)=0$ si dice <u>isotropo</u>.

$$b_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y\right) = y_2 + y_1$$

Quindi $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a b.

Una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice ortogonale rispetto a b, oppure una base ortogonale della coppia (V, b), se

$$b(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

<u>Es</u>: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{K}^2, b_A)$ dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ <u>non</u> è una base ortogonale di $(\mathbb{K}^2, b_A)$ dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Infatti

$$b_A(e_1, e_2) = (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$b_A(e_i, e_j) = a_{ij}.$$

<u>Es</u>: $b(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$, $V = \mathcal{C}^{\circ}([-\pi,\pi], \mathbb{R})$

$$b(\cos x, \sin x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x \, dx = 0$$

$\{\cos x, \sin x\}$ è un insieme ortogonale di (V, b).

$\{1, \cos(nx), \sin(nx) \mid n \geq 1\}$ è ortogonale.

$\underline{Es}$: $\quad b(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \dots + p(n)q(n)$

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

$n = 2$:

$$b\left((x-1)(x-2),\ x(x-2)\right) = 2\cdot 0 + 0\cdot(-2) + 0\cdot 0 = 0$$

$\{(x-1)(x-2),\ x(x-2),\ x(x-1)\}$ è una base ortogonale di $\left(\mathbb{R}[x]_{\leq 2},\ b\right)$.

(Polinomi di Lagrange a meno di multipli).

Forme bilineari reali : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di (V, b).

Poniamo

$$\mathcal{B}^+ = \{v_1, \dots, v_p\} = \{v_i \in \mathcal{B} \mid b(v_i, v_i) > 0\}, \quad |\mathcal{B}^+| = p$$

$$\mathcal{B}^- = \{v_{p+1}, \dots, v_{p+q}\} = \{v_i \in \mathcal{B} \mid b(v_i, v_i) < 0\}, \quad |\mathcal{B}^-| = q$$

$$\mathcal{B}^0 = \{v_{p+q+1}, \dots, v_n\} = \{v_i \in \mathcal{B} \mid b(v_i, v_i) = 0\}, \quad |\mathcal{B}^0| = n-p-q.$$

La coppia (p, q) si chiama la <u>segnatura</u> della base ortogonale $\mathcal{B}$.

Teorema di Sylvester

Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi ortogonali di (V, b). Sia (p, q) la segnatura di $\mathcal{B}_1$ e (p', q') la segnatura di $\mathcal{B}_2$.
Allora $p = p'$ e $q = q'$.
La coppia (p, q) si chiama la <u>segnatura</u> della forma bilineare b, $\boxed{sg(b) = (p, q)}$

<u>dim</u>: 1) $\langle \mathcal{B}_1^0 \rangle = \operatorname{Ker} b = \langle \mathcal{B}_2^0 \rangle$

Infatti, Sia $v \in \operatorname{Ker} b$, $v = v^+ + v^- + v^0$ dove $v^+ \in \langle \mathcal{B}_1^+ \rangle$, $v^- \in \langle \mathcal{B}_1^- \rangle$, $v^0 \in \langle \mathcal{B}_1^0 \rangle$. allora

$$\left[b(v, v) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{B}_1 \text{ è ortogonale.}}}{=} b(v^+, v^+) + b(v^-, v^-) + b(v^0, v^0) \right]$$

$$v = \underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_p v_p}_{\substack{v^+ \\ \cap \\ \langle \mathcal{B}_1^+ \rangle}} + \underbrace{y_1 v_{p+1} + \dots + y_q v_{p+q}}_{\substack{v^- \\ \cap \\ \langle \mathcal{B}_1^- \rangle}} + \underbrace{z_1 v_{p+q+1} + \dots + z_{n-p-q} v_n}_{\substack{v^0 \\ \langle \mathcal{B}_1^0 \rangle}}$$

Dimostriamo che $v = v^0$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ v \in \operatorname{Ker} b}}{0 =} b(v, v_1) = x_1 b(v_1, v_1) + x_2 \cancel{b(v_2, v_1)} + \cancel{\dots} + z_{n-p-q} \cancel{b(v_n, v_1)}$$

$$= x_1 \underbrace{b(v_1, v_1)}_{\substack{\vee \\ 0}} \implies x_1 = 0$$

Similmente, $0 = b(v, v_i) = x_i \quad \forall i = 1, \dots, p$

$$0 = b(v, v_j) = y_j \quad \forall j = p+1, \dots, p+q.$$

$\implies v \in \langle \mathcal{B}_1^0 \rangle.$

$\implies \operatorname{Ker} b \subseteq \langle \mathcal{B}_1^0 \rangle.$

Viceversa, se $v = z_1 v_{p+q+1} + \dots + z_{n-p-q} v_n \in \langle \mathcal{B}_1^0 \rangle$, allora

$$b(v, v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \implies v \in \operatorname{Ker} b.$$

Quindi $<\mathcal{B}_1^0> = <\mathcal{B}_2^0> \Rightarrow \quad p+q = p'+q' = K$.

$\mathcal{B}_1^+ = \{v_1, \dots, v_p\} \qquad \mathcal{B}_2^- = \{w_{p'+1}, \dots, w_{p'+q'}\}$.

Facciamo vedere che $\mathcal{B}_1^+ \cup \mathcal{B}_2^-$ è lin. Ind.

Infatti:

$$x_1 v_1 + \dots + x_p v_p + y_1 w_{p'+1} + \dots + y_{q'} w_{p'+q'} = 0_V$$

$$\Rightarrow \quad x_1 v_1 + \dots + x_p v_p = -y_1 w_{p'+1} - \dots - y_{q'} w_{p'+q'} = u$$

Facciamo il loro quadrato: $b(u,u)$

Notazione: $\boxed{b(v_i, v_i) =: v_i^2}$

$$x_1^2 \underbrace{v_1^2}_{>0} + x_2^2 \underbrace{v_2^2}_{>0} + \dots + x_p^2 \underbrace{v_p^2}_{>0} = y_1^2 \underbrace{w_{p'+1}^2}_{<0} + \dots + y_q^2 \underbrace{w_{p'+q'}^2}_{<0}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \dots = x_p = y_1 = \dots = y_q = 0$$

$p + q' = \dim \langle \mathcal{B}_1^+ \cup \mathcal{B}_2^- \rangle$. Poiché $\langle \mathcal{B}_1^+ \cup \mathcal{B}_2^- \rangle \cap \operatorname{Ker} b = \{0\}$

$\Rightarrow \quad p + q' + \dim \operatorname{Ker} b \leq n$ ovvero $p + q' + n - p - q \leq n$

$\Rightarrow \quad q' \leq q$

Similmente,

$p' + q + \dim \operatorname{Ker} b \leq n$ ovvero $p' + q + n - p' - q' \leq n$

$\Rightarrow \quad q \leq q'$.

Ne segue che $q = q'$. Quindi

$p + q = p' + q' = p' + q \quad \Rightarrow \quad p = p'$.

$\blacksquare$

<u>Es</u>: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcolare la segnatura di b_A.

<u>Sol.</u>: $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\operatorname{Ker} b_A = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\qquad (-1,0,1) AX = 0 \quad \forall X$.

Scegliamo $X \neq 0$ t.c. $\left\{ X, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è lin. ind.

ad esempio $X = e_1$. Cerchiamo $X \neq 0$ t.c.

$$e_1^t AX = 0 \iff (1,1,1) X = 0 \iff x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\iff X \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ e_1, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, b_A)$.

$e_1^2 = (1,0,0) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$, $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^2 = (0 \ -1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ la segnatura è $(2,0)$. $\qquad = (0,-1,0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$

Def: Una forma bilineare reale b su V, $\dim V = n$, si dice

.) <u>Definita positiva</u> se $sg(b) = (n, 0)$ $(\dim \operatorname{Ker} b = 0)$.

.) <u>Semidefinita positiva</u> se $sg(b) = (p, 0)$ con $p < n$ $(\dim \operatorname{Ker} b > 0)$

.) <u>Semidefinita negativa</u> se $sg(b) = (0, q)$ con $q < n$ $(\dim \operatorname{Ker} b > 0)$

.) <u>Definita negativa</u> se $sg(b) = (0, n)$ $(\dim \operatorname{Ker} b = 0)$

.) <u>Indefinita</u> negli altri casi.

$[\, p + q + \dim \operatorname{Ker} b = n \,]$

b si dice <u>non-degenere</u> se $\operatorname{Ker} b = \{0_V\}$.

Prodotti scalari

Sia V uno spazio vettoriale reale.
Un <u>prodotto scalare</u> su V è
una <u>forma bilineare simmetrica definita positiva</u>.

Sia $s : V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare.
Quindi,

1) s è bilineare
2) s è simmetrica
3) s è <u>definita positiva</u>

In particolare s è <u>non-degenere</u> ovvero $\operatorname{Ker} s = \{0\}$.

Sia $v \in V$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di (V, s). Allora

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad \text{e}$$

$$v^2 := s(v,v) = s(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \,,\, x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)$$

$$= x_1^2 \underbrace{v_1^2}_{\substack{\vee \\ 0}} + x_2^2 \underbrace{v_2^2}_{\substack{\vee \\ 0}} + \dots + x_n^2 \underbrace{v_n^2}_{\substack{\vee \\ 0}} \geq 0$$

$$s(v,v) = 0 \iff v = 0_V .$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$b_A(X,Y) = -x_1 y_2 - x_2 y_1$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad (1,1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2, b_A)$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^2 := b_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (1,1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^2 = b_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (1,-1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

$sg(b_A) = (1,1)$. b_A è indefinita e <u>non-degenere</u>.

b_A non è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b_A ha segnatura $(2,0)$

b_A è degenere (i.e. $\operatorname{Ker} b_A \neq 0$).

$\Rightarrow$ b_A non è un prodotto scalare.

<u>Norma</u>: Sia s un prodotto scalare su V. Sia $v \in V$. Definiamo la <u>norma</u> o <u>lunghezza</u> di v come il numero

$$\|v\| = \sqrt{s(v,v)}$$

(per questo mi serve che s sia definita positiva).

Un vettore si dice un <u>versore</u> se ha norma 1.

$$\|v\| = 1 \overset{def}{\iff} v \text{ è un versore}$$

<u>OSS</u>: Se $v \neq 0_V$, allora $\|v\| \neq 0$ e

$$\frac{1}{\|v\|} v \quad \text{è un versore.}$$

$$s\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|^2} s(v,v) = \frac{s(v,v)}{s(v,v)} = 1.$$

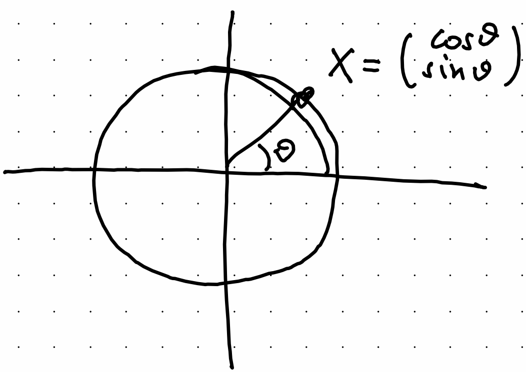
$\cdot)$ $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ $\qquad \cdot = b_{\mathbb{1}_2}$

$$X \cdot Y = X^t Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

$$\| X \| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

I versori di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ sono $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ t.c. $x_1^2 + x_2^2 = 1$

$\Rightarrow \exists\, \theta \in [0, 2\pi)$ t.c. $X = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$



$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

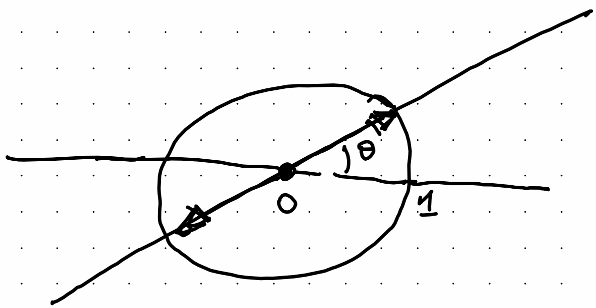
coseni direttori :

Sia $r: ax+by=c$ una retta di $\mathbb{R}^2$.

$$r = X_0 + \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$$

I versori direttori di r (= vettori direttori di norma 1) sono

$$\pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$



$$= \pm \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \end{pmatrix}$$

coseni direttori di r.

Es:

I coseni direttori di $r: \; 2x+3y=5$

sono

$$\pm\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{4+9}} \\ \frac{2}{\sqrt{4+9}} \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$