<u>Richiami</u>: Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di una forma bilineare $b: V \times V \to \mathbb{R}$ <u>simmetrica</u>.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di (V, b), i.e.

1) $\mathcal{B}$ è una base di V

2) $b(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad (\Leftrightarrow v_i \perp v_j)$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^- \cup \mathcal{B}^0$ dove $\qquad v_i^2 := b(v_i, v_i)$

$$\mathcal{B}^+ = \{v_i \in \mathcal{B} \mid b(v_i, v_i) > 0\} \overset{\downarrow}{=} \{v_i \mid v_i^2 > 0\}$$

$$\mathcal{B}^- = \{v_i \in \mathcal{B} \mid b(v_i, v_i) < 0\} = \{v_i \mid v_i^2 < 0\}$$

$$\mathcal{B}^0 = \{v_i \in \mathcal{B} \mid b(v_i, v_i) = 0\} = \{v_i \text{ \underline{isotropo}}\}$$

$|\mathcal{B}^+| = p$, $|\mathcal{B}^-| = q$, $|\mathcal{B}^0| =$ nullità di b

$= \dim \operatorname{Ker}(b)$

$$\operatorname{Ker}(b) = \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \quad \forall w \in V\}.$$

Teorema di Sylvester

La coppia (p,q) non dipende dalla base ortogonale scelta.
In altre parole, se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ortogonali di (V,b) allora

$$|\mathcal{B}^+| = |\mathcal{B}'^+|$$

$$|\mathcal{B}^-| = |\mathcal{B}'^-|$$

$$|\mathcal{B}^0| = |\mathcal{B}'^0|$$

La coppia (p,q) si chiama la segnatura di b,

$$sg(b) := (p,q).$$

<u>dim</u>: $\mathcal{B}^+ = \{v_1, \dots, v_p\}$ $\mathcal{B}^- = \{v_{p+1}, \dots, v_{p+q}\}$ $\mathcal{B}^0 = \{v_{p+q+1}, \dots, v_n\}$

$\mathcal{B}'^+ = \{w_1, \dots, w_{p'}\}$ $\mathcal{B}'^- = \{w_{p'+1}, \dots, w_{p'+q'}\}$ $\mathcal{B}'^0 = \{w_{p'+q'+1}, \dots, w_n\}$

Si dimostra che $\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}'^-$ è lin. indipendente.

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}'^- \cup \mathcal{B}^0$ è lin. indip.

$\Rightarrow$ $p + q' + (n-p-q) \leq n$ $\Rightarrow$ $q' \leq q$.

Similmente $\mathcal{B}'^+ \cup \mathcal{B}^-$ è lin. indipendente

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}'^+ \cup \mathcal{B}^- \cup \mathcal{B}'^0$ è lin. ind.

$\Rightarrow$ $p' + q + (n-p'-q') \leq n$ $\Rightarrow$ $q \leq q'$

$\Rightarrow$ $q = q'$ $\Rightarrow$ $p = p'$. $\blacksquare$

OSS: Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di (V, b), Allora la matrice che rappresenta b in questa base è diagonale:

$$A_{b,\mathcal{B}} = \left(b(v_i, v_j) \right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} v_1^2 & & & 0 \\ & v_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & v_n^2 \end{pmatrix}$$

ordinando la base come $\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^- \cup \mathcal{B}^0$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} v_1^2 > 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & v_p^2 > 0 & & & & 0 & \\ & & & v_{p+1}^2 < 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & v_{p+q}^2 < 0 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Se $V = \mathbb{R}^n$. Allora $b = b_A$ dove

$$A = (b(e_i, e_j)) = A^t \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

$$b_A(X, Y) := X^t A Y$$

<u>Def</u>: La <u>segnatura</u> di una matrice simmetrica $A = A^t \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ è per definizione la segnatura di b_A.

$$sg(A) = (p, q) = sg(b_A).$$

Ricordiamo che $b_A = b_{A'}$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ B invertibile t.c.

$$B^t A' B = A$$ $\Leftrightarrow$ A e A' sono congruenti.

Teorema (Classificazione delle forme bilineari su $\mathbb{K}^n$).

Due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.

dim: (Domani!)

Es: $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\det = b_A$ dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

quindi b_A non è simmetrica.

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcoliamo la segnatura di A.

$b_A(e_1, e_1) = b_A(e_2, e_2) = 0$.

"Basta" completare $\{e_1\}$ ad una base ortogonale.

$b_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$b_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow$ non esiste una base ortogonale che contiene $\{e_1\}$.

$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2, b_A)$.

$$b_A\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = (1,1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (1,1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2 > 0$$

$$b_A\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = (1,-1)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -2 < 0$$

$$\Rightarrow \quad sg(A) = (\underset{\substack{\uparrow\\ p}}{1}, \underset{\substack{\uparrow\\ q}}{1}).$$

<u>Es</u>: $A' = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. $\quad b_{A'}(e_1,e_2) = b_{A'}(e_2,e_1) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ è una base ortogonale.

$e_1^2 = 1$

$e_2^2 = -1$

$sg(A') = (1,1) = sg(A) \quad \Rightarrow \quad A$ e A' sono congruenti.

$b_{A'}(X,Y) = x_1y_1 - x_2y_2$ e $b_A(X,Y) = x_1y_2 + x_2y_1$ sono

la stessa forma bilineare:

Cerchiamo B t.c. $B^t A' B = A$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \mathcal{B}' = \{ e_1, e_2 \}$ sono due basi di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "B"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b_{A'}(X, Y) = b_{A'}(F_{\mathcal{B}'}(X), F_{\mathcal{B}'}(Y)) =$$

$$= b_{A'}(B F_{\mathcal{B}}(X), B F_{\mathcal{B}}(Y))$$

$$= F_{\mathcal{B}}(X)^t B^t A' B F_{\mathcal{B}}(Y) \neq b_A(F_{\mathcal{B}}(X), F_{\mathcal{B}}(Y))$$

$$B^t A' B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} B =: B' \Rightarrow B'^t A' B' = A.$$

Esistenza delle basi ortogonali

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale, b : forma simmetrica.
Definiamo l'ortogonale di U come

$$U^{\perp} := \{ v \in V \mid b(v,u) = 0 \quad \forall u \in U \}$$

<u>OSS</u>: $U^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V.
Infatti, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, v_2 \in U^{\perp}$, $\forall u \in U$

$$b(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha \underbrace{b(v_1, u)}_{=0} + \beta \underbrace{b(v_2, u)}_{=0} = 0$$

$U^{\perp}$ si chiama il <u>sottospazio ortogonale</u> a U.

Prop.: Sia $v \in V$ t.c. $v^2 \neq 0$.
Allora
$$\dim \langle v \rangle^{\perp} = \dim V - 1.$$
dim: Consideriamo la funzione
$$F_v : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto b(w, v)$$
Allora F_v è lineare ed è suriettiva, perché $b(v,v) \neq 0$.
Inoltre
$$\operatorname{Ker} F_v = \{ w \in V \mid b(w,v) = 0 \} = \langle v \rangle^{\perp}$$
Dalla formula della dimensione
$$\dim \langle v \rangle^{\perp} = \dim V - \dim \mathbb{R} = \dim V - 1.$$
$\boxtimes$

Restrizione delle forme ad un sottospazio

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale, e sia $b: V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica e bilineare.

Allora possiamo considerare la <u>restrizione di b ad U</u>

$$b|_U : U \times U \to \mathbb{R}$$

$$b|_U (u_1, u_2) := b(u_1, u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

In particolare, se $U = \operatorname{Ker} b$, allora $b|_{\operatorname{Ker} b}$ è la f.ne nulla.

Se $V = W \oplus \operatorname{Ker} b$ allora $b|_W$ è non-degenere.

Infatti, se $\exists\, w \in W$ t.c. $b(w, w_1) = 0 \ \forall w_1 \in W$ allora

$$b(w, v) = 0 \quad \forall v \in V \text{ e quindi } w \in \operatorname{Ker} b \cap W = \{0_V\}$$

Sia $U \subset V$ un s.sp. vettoriale t.c. $b|_U$ è non-degenere. Sia $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ una base di U. Consideriamo la funzione

$$F_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$u \longmapsto \begin{pmatrix} b(u, u_1) \\ b(u, u_2) \\ \vdots \\ b(u, u_k) \end{pmatrix}$$

F_U è lineare. Inoltre,

$$F_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^K$$

$$u \longmapsto \begin{pmatrix} b(u, u_1) \\ \vdots \\ b(u, u_K) \end{pmatrix}$$

è suriettiva. Infatti, poniamo

$$v_1 = F_U(u_1) = \begin{pmatrix} b(u_1, u_1) \\ \vdots \\ b(u_1, u_K) \end{pmatrix}, \quad v_2 = F_U(u_2), \dots, v_K = F_U(u_K) \in \mathbb{R}^K.$$

Allora $\{v_1, \dots, v_K\}$ è lin. Ind.

$$\sum_{i=1}^{K} x_i v_i = 0_{\mathbb{R}^K} \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} x_i \begin{pmatrix} b(u_i, u_1) \\ \vdots \\ b(u_i, u_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{K} x_i b(u_i, u_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, K.$$

$$\Rightarrow b\left(\sum_{i=1}^{K} x_i u_i, u_j\right) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, K.$$

$$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{K} x_i u_i \in \operatorname{Ker} b|_U = \{0_V\} \Rightarrow \sum x_i u_i = 0_V \Rightarrow \underset{\forall i}{x_i = 0}$$

Prop.: Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale.
Sia $b: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.
Supponiamo che $b|_U$ sia non-degenere.
Allora

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U$$

ed inoltre

$$U \oplus U^\perp = V$$

dim: La funzione $F_U : U \to \mathbb{R}^K$ definita prima è lineare e suriettiva. Quindi

$$\dim \operatorname{Ker} F_U = \dim U - K = 0.$$

F_U è un isomorfismo lineare.
Consideriamo la funzione

$$F_U : V \to \mathbb{R}^K$$
$$v \mapsto \begin{pmatrix} b(v, u_1) \\ \vdots \\ b(v, u_K) \end{pmatrix}$$

F_U è lineare e suriettiva, e quindi

$\dim \operatorname{Ker} F_U = \dim V - k = \dim V - \dim U$.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} F_U &= \{ v \in V \mid b(v, u_i) = 0 \ \ \forall i = 1, \dots, k \} \\ &= \{ v \in V \mid b(v, u) = 0 \ \ \forall u \in U \} \\ &= U^{\perp}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \dim U^{\perp} = \dim V - \dim U.$$

$$U \cap U^{\perp} = \{ u \in U \mid b(u, u') = 0 \ \ \forall u' \in U \} \overset{!}{=} \operatorname{Ker} b|_U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ipotesi } b|_U \text{ è non-degenere.}}}{=} \{ 0_V \} \qquad \boxtimes$$

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale, sia $b: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.
Allora esiste una base ortogonale di (V, b).

dim:
Se $\operatorname{Ker} b = V$ allora $b = 0$ ed ogni base di V è ortogonale.
Supponiamo che $\operatorname{Ker} b \subsetneq V$.
Sia U un complementare di $\operatorname{Ker} b$.

$$V = U \oplus \operatorname{Ker} b.$$

Allora $b|_U$ è non-degenere.

OSS (Importante): $\exists\, u \in U$ t.c. $u^2 \neq 0$.
Infatti sia $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_k\}$ una base di U. se $u_1^2 = \dots = u_k^2 = 0$. se $b(u_i, u_j) = 0$ ~~allora~~ $\forall i, j$, allora $\mathcal{B}$ è una base ortogonale di U, ed abbiamo finito.

Se $b(u_i, u_j) \neq 0$ ma $u_i^2 = u_j^2 = 0$ allora

$$b(u_i + u_j, u_i + u_j) = u_i^2 + u_j^2 + 2\, b(u_i, u_j)$$
$$= 2\, b(u_i, u_j) \neq 0$$

$\Rightarrow$ $u = u_i + u_j$ non è isotropo.

Dobbiamo trovare una base ortogonale $\mathcal{B}_U$ di $(U, b|_U)$. Infatti se $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} b}$ è una base (qualunque) di $\operatorname{Ker} b$ allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} b} = \mathcal{B}$ è una base ortogonale di (V, b).

1) Sia $u \in U$ t.c. $u^2 \neq 0$.

2) Consideriamo $\langle u \rangle^{\perp} \subset V$. Allora

$$\langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^{\perp} = \langle u \rangle \oplus U' \oplus \operatorname{Ker} b$$

e $\dim U' = \dim U - 1$, $b|_{U'}$ è non-degenere.
Ricominciamo da 1) con U' al posto di U. $\boxtimes$

<u>Ricapitolando</u> : (V, b) b bilineare e simmetrica.

1) $V = U \oplus \operatorname{Ker} b$, $b|_U$ è non degenere

2) $\exists$ base ortogonale $\mathcal{B}$ di V che è fatta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} b}$, dove $\mathcal{B}_U$ è ortogonale in $(U, b|_U)$ e $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} b}$ è una base di $\operatorname{Ker} b$.

3) Se $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^- \cup \mathcal{B}^0$ è una base ortogonale di (V, b), allora la matrice che rappresenta b in $\mathcal{B}$ è diagonale

$$A = \begin{pmatrix} + & & & & & & & & \\ & + & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & + & & & & & \\ & & & & - & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & - & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

4) $\mathcal{B}^+ = \{v_1, \dots, v_p\}$ $\quad \mathcal{B}^- = \{v_{p+1}, \dots, v_{p+q}\}$.

definiamo

$$E_1 = \frac{v_1}{\sqrt{b(v_1, v_1)}}, \quad E_2 = \frac{v_2}{\sqrt{b(v_2, v_2)}}, \dots, \quad E_p = \frac{v_p}{\sqrt{b(v_p, v_p)}}$$

$$E_{p+1} = \frac{v_{p+1}}{\sqrt{-b(v_{p+1}, v_{p+1})}}, \dots, \quad E_{p+q} = \frac{v_q}{\sqrt{-b(v_q, v_q)}}$$

Allora

$\mathcal{C} = \{E_1, \dots, E_p, E_{p+1}, \dots, E_q, v_{p+q+1}, \dots, v_n\}$

è una base ortogonale di (V, b) ed in più

$$E_1^2 = b\left(\frac{v_1}{\sqrt{b(v_1, v_1)}}, \frac{v_1}{\sqrt{b(v_1, v_1)}}\right) = \frac{1}{b(v_1, v_1)} b(v_1, v_1) = 1$$

$\vdots$

$$E_p^2 = 1$$

$$E_{p+1}^2 = \frac{b(v_{p+1}, v_{p+1})}{\sqrt{-b(v_{p+1}, v_{p+1})}} = -1$$

$\vdots$

$$E_{p+q} = -1$$

Quindi la matrice che rappresenta b nella base e è

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

e si chiama base di Sylvester.