Comunicazioni: Test OFA in presenza:
ogni Martedì e Giovedì dalle 09:00 alle 16:30
palazzina RM004, Via Scarpa 16.

Domande: 1) Matrice associata ad una forma bilineare in una base di Sylvester:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_p & & \\ \hline & -\mathbb{1}_q & \\ \hline & & 0_{n-p-q} \end{array}\right)$$

$sg(b) = (p,q)$.

Richiami: Sia V un $\mathbb{K}$-sp. vett., $b: V\times V \to \mathbb{K}$ bilineare e simmetrica.

.) Teorema (di decomposizione ortogonale):

Sia $U \subset V$ un s.sp. vett. t.c. $b|_U$ è non-degenere
($\overset{def}{\iff}$ $\ker b|_U = \ker b \cap U = \{0_V\} \iff U \cap U^\perp = \{0_V\}$) allora

$$V = U \oplus U^\perp$$

dove $U^\perp = \{ v \in V \mid b(v,u) = 0 \ \ \forall u \in U \}$

.) Esiste una base ortogonale di (V, b):

Richiami della dimostrazione

1) Trovare una base di $\ker b$.

2) Sia U un complementare di $\ker b$: $V = \ker b \oplus U$

Sia $v_1 \in U$ t.c. $v_1^2 = b(v_1, v_1) \neq 0$.

$\Rightarrow$ $\dim \langle v_1 \rangle^\perp \cap U < \dim U$

Sia $v_2 \in \langle v_1 \rangle^\perp \cap U$ t.c. $v_2^2 \neq 0$. e così via...

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

·) <u>Teorema di Sylvester</u> :

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono due basi ortogonali di (V, b),

allora $|\mathcal{B}^+| = |\mathcal{C}^+|$, $|\mathcal{B}^-| = |\mathcal{C}^-|$, $|\mathcal{B}^0| = |\mathcal{C}^0| = \dim \operatorname{Ker} b$

dove

$$\mathcal{B}^+ = \{ v \in \mathcal{B} \mid v^2 > 0 \},\quad \mathcal{B}^- = \{ v \in \mathcal{B} \mid v^2 < 0 \},\quad \mathcal{B}^0 = \{ v \in \mathcal{B} \mid v^2 = 0 \}.$$

$sg(b) = (p, q)$ dove $p = |\mathcal{B}^+|$, $q = |\mathcal{B}^-|$.

Data una base ortogonale $\mathcal{B}$ di (V, b),

consideriamo la <u>base di Sylvester</u>

$$\mathcal{S} = \{ E_1, \dots, E_n \} \quad \text{dove}$$

$$E_i = \frac{v_i}{\sqrt{|v_i^2|}} \qquad \text{se } v_i^2 \neq 0$$

$$E_i = v_i \qquad \text{se } v_i^2 = 0$$

In questo modo : $b(E_i, E_j) = 0$ $i \neq j$; $E_i^2 = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i^2 > 0 \\ -1 & \text{se } v_i^2 < 0 \\ 0 & \text{se } v_i^2 = 0 \end{cases}$

Se $\mathcal{S} = \{E_1, \dots, E_n\}$ è una base di Sylvester, la matrice che rappresenta b in $\mathcal{S}$ è

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-p-q} \end{array}\right)$$

•) <u>Teorema</u> (di classificazione delle matrici simmetriche a meno di congruenza)

Due matrici simmetriche $A, A' \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura

(<u>Def</u>: $sg(A) := sg(b_A)$, $b_A(X,Y) = X^t A Y$).

dim (Teorema di classificazione)

Se A e A' sono congruenti, allora $\exists\, B$ invertibile t.c.

$$B^t A' B = A.$$

Facciamo vedere che b_A e $b_{A'}$ hanno la stessa segnatura.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale per $(\mathbb{R}^n, b_A)$.

Si ha

$$b_A(v_i, v_j) = v_i^t A v_j = v_i^t B^t A' B v_j = (Bv_i)^t A' (Bv_j) = b_{A'}(Bv_i, Bv_j)$$

Quindi la base

$$B\mathcal{B} = \{Bv_1, Bv_2, \dots, Bv_n\}$$

è una base ortogonale per $(\mathbb{R}^n, b_{A'})$, inoltre

v_i^2 ha lo stesso segno di $(Bv_i)^2$. Quindi

b_A e $b_{A'}$ hanno la stessa segnatura.

Supponiamo che b_A e $b_{A'}$ abbiano la stessa segnatura. Facciamo vedere che A ed A' sono congruenti:

Sia $\mathcal{S}$ una base di Sylvester per b_A e sia $\mathcal{S}'$ una base di Sylvester per $b_{A'}$.

La matrice che rappresenta b_A in $\mathcal{S}$ e $b_{A'}$ in $\mathcal{S}'$ è la stessa matrice

$$S = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-p-q} \end{array}\right)$$

Quindi $\exists\, B, B'$ invertibili tali che

$$B^t S B = A \quad e \quad (B')^t S B' = A' \qquad \begin{bmatrix} (AB)^t = B^t A^t \\ (B^t)^{-1} = (B^{-1})^t \\ \forall A, B. \end{bmatrix}$$

Quindi $S = (B')^{t\,-1} A' (B')^{-1}$

$$\Rightarrow \quad B^t (B')^{t\,-1} A' B'^{-1} B = A \quad \Rightarrow \quad \left[(B')^{-1} B\right]^t A' \left[(B')^{-1} B\right] = A$$

$\blacksquare$

$\underline{Es}$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Stabilire se A e A' sono congruenti e nel caso lo siano trovare B_0 invertibile t.c. $B_0^t A' B_0 = A$.

$\underline{Sol.}$:

$\operatorname{Ker} b_A = \operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\{v_1, v_2\}$ è una base ortogonale di b_A

$v_1^2 = b_A(v_1, v_1) = b_A(e_1, e_1) = a_{11} = 1 > 0 \quad \Rightarrow sg(A) = (1,0)$

$\operatorname{Ker} b_{A'} = \operatorname{Ker} A' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\{w_1, w_2\}$ è una base ortogonale di $b_{A'}$.

$w_1^2 = b_{A'}(w_1, w_1) = b_{A'}(e_1, e_1) = a'_{11} = 2 > 0 \Rightarrow sg(A') = (1,0)$

$\Rightarrow$ A e A' sono congruenti perché $sg(A) = sg(A')$.

$\mathcal{S} = \{v_1, v_2\}$ è una base di Sylvester di b_A

$\mathcal{S}' = \left\{ \frac{w_1}{\sqrt{2}}, w_2 \right\}$ è una base di Sylvester di $b_{A'}$.

Nella base $\mathcal{S}$ b_A è rappresentata da

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nella base $\mathcal{S}'$ $b_{A'}$ è rappresentata da

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists\ B, B'$ t.c. $\quad B^t S B = A\,,\quad (B')^t S B' = A'$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dash] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \cdot \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\ \cdot \arrow[r, "B"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

$$F_{\mathcal{B}'}(v)^t \underbrace{A'}_{\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'}(w) = F_{\mathcal{B}}(v)^t \underbrace{B^t A' B}_{\mathcal{B}\ \ ''A} F_{\mathcal{B}}(w)$$

Se $\quad B = (v_1 | v_2) \Rightarrow \quad B^t A B = S$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "="] \arrow[d, "F_{\mathcal{S}}"'] & \cdot \arrow[d, "F_e"] \\ \cdot \arrow[r, "B"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Se $\quad B' = \left(\frac{w_1}{\sqrt{2}} \middle| w_2\right) \Rightarrow \quad B'^t A' B' = S$

$$(B^t)^{-1} (B')^t A' \underbrace{B' B^{-1}} = A$$

è la matrice cercata.

$$B' B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B_0$$

Verifichiamo

$$B_0^t A' B_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Spazi Euclidei:

Sia V uno sp. vettoriale reale. Una forma bilineare simmetrica e definita positiva su V si chiama un prodotto scalare. Quindi un prodotto scalare su V è una funzione

$$s : V \times V \to \mathbb{R}$$

t.c.

1) s è bilineare
2) s è simmetrica
3) s è non-degenere
4) s è definita positiva

(Esercizio) $\iff$

$$v^2 = s(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in V \quad \text{e} \quad v^2 = 0 \iff v = 0_V.$$

La coppia (V, s) si chiama uno spazio Euclideo.

1) $V = \mathbb{R}^n$ $\quad s = b_{\mathbb{1}_n} = \cdot$: prodotto scalare standard.

$$s(X, Y) = X \cdot Y = X^t Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

se $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + 2 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 6 - 4 = 2$$

2) $V = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, $\quad b(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$

$b = s$ è un prodotto scalare.

3) $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $\quad s(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \dots + p(n)q(n)$.

Se $v \neq 0_V$, $v^2 > 0$. Definiamo la <u>norma</u> di v come

$$\|v\| = \sqrt{v^2} = \sqrt{s(v,v)}$$

<u>Es</u>: In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

In $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

<u>Def</u>: Un <u>versore</u> è un vettore di norma 1.

<u>OSS</u>: $v \neq 0 \Rightarrow \dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{v}{\sqrt{v^2}}$ è un versore.

La proiezione ortogonale

Sia (V, s) uno spazio euclideo.
Sia U un sottospazio vettoriale.
∴ Dato che $\ker s = \{0_V\}$, $s|_U$ è non-degenere, quindi vale il teorema di decomposizione ortogonale

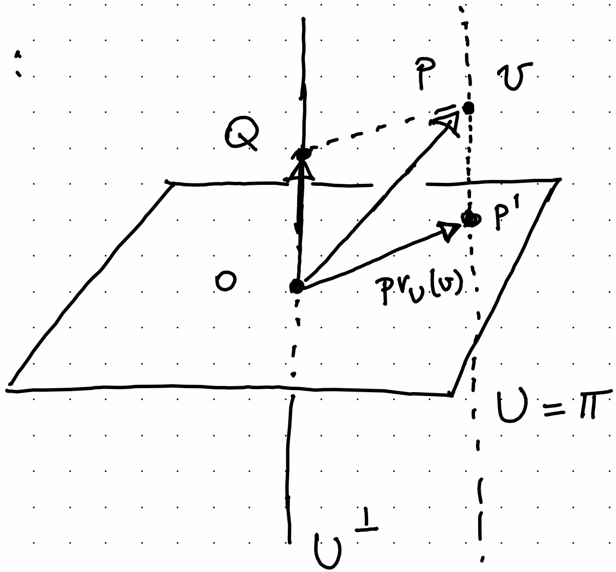
$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Def: La <u>proiezione ortogonale</u> su U è la proiezione su U lungo $U^{\perp}$, ovvero è la funzione

$$pr_U : V \longrightarrow V$$

$$v = u + u' \longmapsto u \qquad \text{dove } u \in U,\ u' \in U^{\perp}.$$

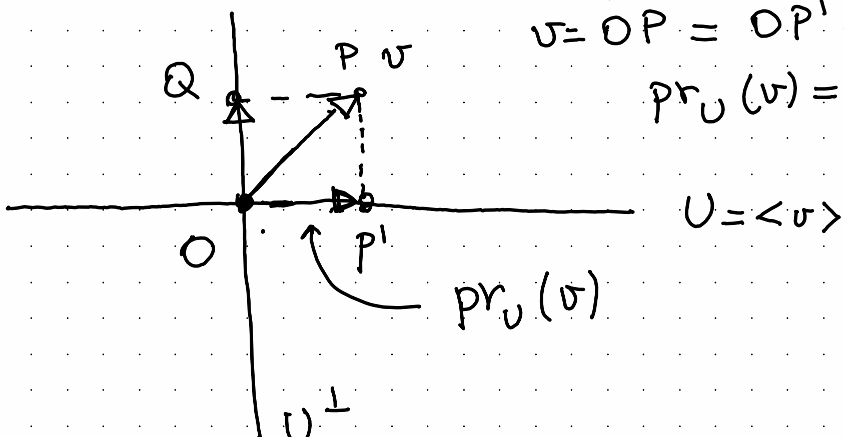
$(\mathbb{R}^3, \cdot)$:



$$v = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ}$$

$$pr_U(v) = \overrightarrow{OP'}$$

$(\mathbb{R}^2, \cdot)$



$$v = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ}$$

$$pr_U(v) = \overrightarrow{OP'}$$

<u>oss</u>: Dato $v \in V = U \oplus U^\perp$, allora

$$v - pr_U(v) \in U^\perp$$

$$v = \underbrace{pr_U(v)}_{\in U} + (v - pr_U(v))$$

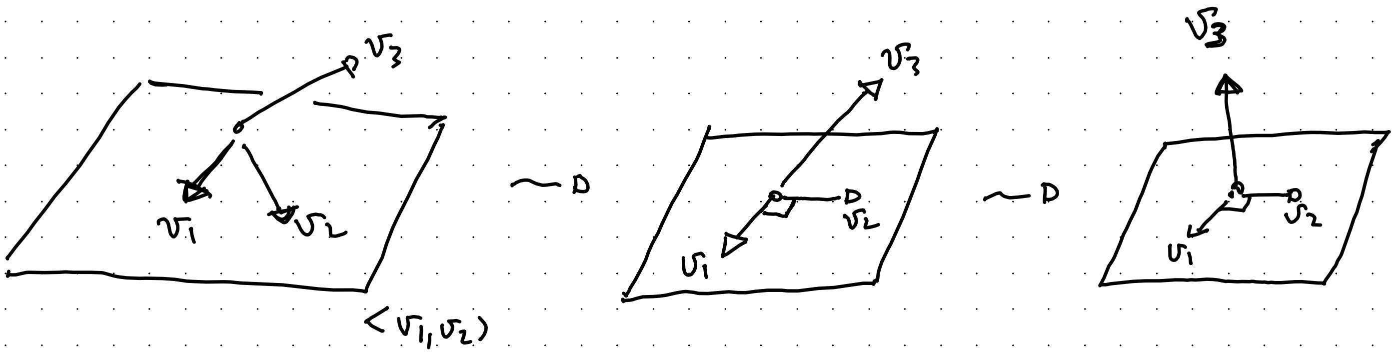
Scriviamo $v = u + u'$ con $u \in U$, $u' \in U^\perp$

$$\Rightarrow u' = v - u = v - pr_U(v).$$

Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Idea: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base

Possiamo "raddrizzarla" per creare una base ortogonale:



Teorema : Sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di U.
Sia s un prodotto scalare su V.
Allora esiste una base $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ di V
con le seguenti proprietà:

1) $\mathcal{E}$ è una base ortogonale di (V, s)
2) $\|E_1\| = \dots = \|E_n\| = 1$.

$\mathcal{E}$ è una base orto-normale di (V, s)

3) $s(v_i, E_i) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.
4) $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle F_1, \dots, F_i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$.

$\mathcal{E}$ si ottiene come segue:

$$F_1 := v_1$$

$$F_i := v_i - pr_{\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle}(v_i) \qquad \forall i = 2, \dots, n$$

Si pone $E_i = \dfrac{F_i}{\|F_i\|}$.

Es: Ortonormalizzare la seguente base di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sol.:

$$F_1 = v_1 .$$

$$F_2 = v_2 - pr_{\langle v_1 \rangle}(v_2) = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1^2} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$pr_{\langle v_1 \rangle}(v_2) = t v_1 \qquad \text{chi è } t\,?$$

$$v_2 = t v_1 + \overbrace{(v_2 - t v_1)}^{\langle v_1 \rangle^{\perp}}$$

Quindi

$$s(v_2, v_1) = s(t v_1, v_1) + \underbrace{s(v_2 - t v_1, v_1)}_{= 0} = t\, s(v_1, v_1)$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{s(v_2, v_1)}{s(v_1, v_1)} = \frac{s(v_2, v_1)}{v_1^{2}}$$

$$F_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = v_3 - pr_{<F_1, F_2>}(v_3)$$

$$v_3 = pr_{<F_1,F_2>}(v_3) + \left(v_3 - pr_{<F_1,F_2>}(v_3)\right)$$

$$s(v_3, F_1) = s\left(pr_{<F_1,F_2>}(v_3), F_1\right) = t_1 F_1^2 \Rightarrow t_1 = \frac{s(v_3,F_1)}{F_1^2}$$

$$s(v_3, F_2) = s\left(pr(v_3), F_2\right) = t_2 F_2^2 \Rightarrow t_2 = \frac{s(v_3,F_2)}{F_2^2}$$

$$pr_{<F_1,F_2>}(v_3) = t_1 F_1 + t_2 F_2$$

$$pr_{<F_1,F_2>}(v_3) = \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1^2} F_1 + \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2^2} F_2 = \frac{0}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = v_3 - pr_{\langle F_1, F_2 \rangle}(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$ è

una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.

Dividiamo per le norme:

$$\mathcal{E} = \left\{ E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è la base richiesta.

<u>oss</u> :

$$F_i = v_i - pr_{\langle F_1, \dots, F_{i-1} \rangle}(v_i)$$

e

$$pr_{\langle F_1, \dots, F_{i-1} \rangle}(v_i) = \frac{s(v_i, F_1)}{F_1^2} F_1 + \frac{s(v_i, F_2)}{F_2^2} F_2 +$$

$$+ \dots + \frac{s(v_i, F_{i-1})}{F_{i-1}^2} F_{i-1}$$