

Ricevimento 8/12

A: Ore 14:00 (No cambiamento)

B: Ore 9:00

Sondaggio ABCDE

Lezione

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R}

sia $s(\cdot, \cdot)$ un prodotto scalare su V

- ortogonalità v, u possiamo dire che $v \perp u$

- distanze v, u „ $\text{dist}(v, u)$

$$S = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$$

Def: S si dice "ortogonale" se ogni coppia dei suoi vettori è una coppia ortogonale

$$\forall i \neq j, \quad s(v_i, v_j) = 0 \quad \text{e} \quad v_i \neq 0$$

Lemma: se S è ortogonale allora S è indep.

Dim: $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$

supponiamo che $w = 0$

per vedere che $\lambda_1 = 0$, $s(w, v_1) =$

$$S(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r, v_1) =$$

$$\lambda_1 S(v_1, v_1) + \dots + \lambda_r \underbrace{S(v_r, v_1)}_{=0} =$$

$$\lambda_1 v_1^2$$

ma sappiamo mo che $w = 0$

$$\lambda_1 v_1^2 = S(w, v_1) = S(0, v_1) = 0$$

dato che $v_1^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

Quindi tutti i $\lambda_i = 0$.

Base ortogonale di V

è una base che è anche un insieme ortogonale.

Es: calcoliamo F_B per B ortogonale

(di solito $w = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$)

e doveremo risolvere il sistema lineare
nelle incognite λ_i

Ora invece troviamo direttamente i singoli coefficienti:

I termini: $\frac{s(w, b_i)}{s(b_i, b_i)}$ sono detti

"coefficienti di Fourier" del vettore w
rispetto la base $B = (b_1, \dots, b_n)$

Es: \mathbb{R}^2 con $s(u, v) = u^t \cdot v$

$$B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{b_2} \right) \quad b_1 \cdot b_2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$$

$$w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{w \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} = \frac{2x_1 + x_2}{5}$$
$$F_B = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Proiezione ortogonale

$$\left(\begin{array}{l} V = U \oplus W \\ v \in V \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{pr}_U^W(v) = u \quad \text{t.c.} \\ v = u + \underline{w} \\ \text{con } u \in U \\ w \in W \end{array} \right)$$

(V, s) spazio vettoriale euclideo

$$U \subseteq V \quad \text{s.s.p. vett.} \quad W = U^\perp$$

$$V = U \oplus U^\perp \quad \text{pr}_U^{U^\perp}(v) = \text{pr}_U(v)$$

Supponiamo di avere \mathcal{B} una base ortogonale

di V f.c. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$

$$U = \langle b_1, \dots, b_r \rangle \quad U^\perp = \langle b_{r+1}, \dots, b_n \rangle$$

$w \in V$

$\text{pr}_U(w)$

Sappiamo

$$w = \underbrace{\frac{s(w, b_1)}{s(b_1, b_1)} b_1 + \dots}_{\text{pr}_U(w)} + \underbrace{\frac{s(w, b_n)}{s(b_n, b_n)} b_n}_{\text{pr}_{U^\perp}(w)}$$

primi r
 $\text{pr}_U(w)$

$\text{pr}_{U^\perp}(w)$

$$\text{PR}_U(w) = \frac{S(w, b_1)}{S(b_1, b_1)} b_1 + \dots + \frac{S(w, b_r)}{S(b_r, b_r)} b_r$$

Oss:

Se $\forall i \quad S(b_i, b_i) = 1$, i coeff. di Fourier sono più semplici: $S(w, b_i)$. (La base è ortonormale) (in questi casi.)

Esempio: $V = \mathbb{R}^n$ $S = \cdot$

$U \subseteq V$ Supponiamo di avere $U = \langle q_1, \dots, q_r \rangle$

con (q_1, \dots, q_r) base ortonormale di U

$$U = \text{Col}(Q) \quad Q = (q_1 | \dots | q_r)$$

$$q_i \cdot q_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$Q^t \cdot Q = \mathbb{1}_r \quad \text{è la condizione su } Q$$

per la proiezione ortogonale:

$$w = (w \cdot q_1)q_1 + \dots + (w \cdot q_r)q_r$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_r \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \cdot q_1 \\ \vdots \\ w \cdot q_r \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \hline q_1^t \\ \vdots \\ q_r^t \\ \hline \end{pmatrix} w$$

$$Q \in \text{Mat}_{n \times r}$$

$$\mathbb{R}^r$$

$$Q^t$$

$$w \cdot q_i = q_i \cdot w = q_i^t w$$

Formula per la proiezione ortog. su $\text{Col}(Q) = U$

dove $Q^t \cdot Q = \mathbb{1}$

la proiezione è $\text{pr}_U(w) = \underbrace{Q \cdot Q^t}_w w$

Es: $V = \mathbb{R}^3$ $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

non posso scrivere subito $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

perché $Q^t \cdot Q = 3 \neq 1$

scrivo $U = \langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{pr}_U = Q \cdot Q^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Piccola oss:

$$(Q \cdot Q^t)^2 = \underbrace{Q Q^t Q Q^t}_{\mathbb{1}_r} = Q \mathbb{1} Q^t = Q Q^t$$

$$\text{pr}_U(w)^2 = \text{pr}_U(w)$$

Distanze

sia (V, s) uno spazio euclideo

$s(v, u)$ è pr. scalare

1 step: $s(u, u) \geq 0$ $\|u\| := \sqrt{s(u, u)}$ norma di u

$$\|\lambda u\| = \sqrt{s(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda^2 s(u, u)} = |\lambda| \|u\|$$

2 step: $\text{dist}(v, u) := \|v - u\|$

è invariante per traslazione

$$\text{dist}(v, u) = 0 \Leftrightarrow \|v - u\| = 0 \Leftrightarrow v - u = 0 \\ \Leftrightarrow v = u$$

$$E \subseteq \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



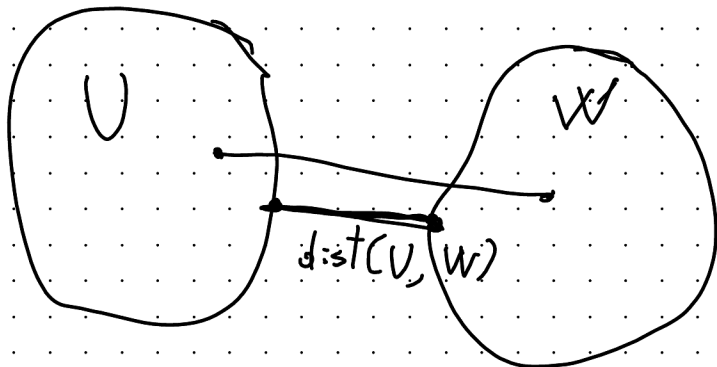
$$\text{dist}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Distanza fra sottospazi affini

(V, s) spazio euclideo

U, W sottospazi affini

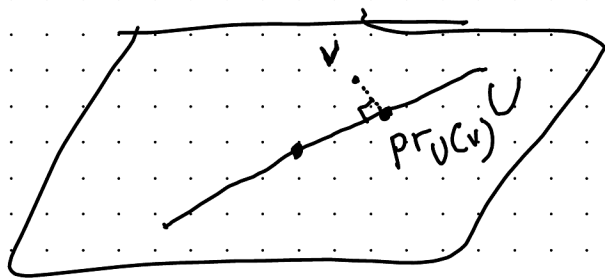
$$\text{dist}(U, W) := \min_{\substack{u \in U \\ w \in W}} \text{dist}(u, w)$$



Distanza fra punto e sottospazio vettoriale

(V, s) sp. euclideo $v \in V$

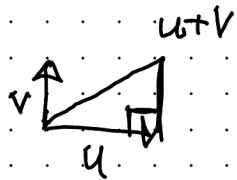
$U \subseteq V$



Teorema: la distanza fra v e U è data
dalla distanza fra v e $pr_U(v)$

$$\text{dist}(v, U) = \|v - pr_U(v)\|$$

Parentesi: teorema di Pitagora per spazi euclidei



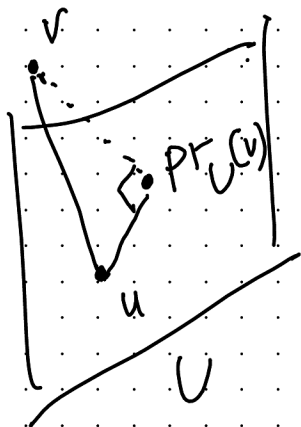
$$u, v \in V \quad \text{t.c.} \quad u \perp v$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\text{Dim: } \|u+v\|^2 = s(u+v, u+v) =$$

$$= s(u, u) + s(u, v) + s(v, u) + s(v, v)$$

$$= \|u\|^2 + 0 + 0 + \|v\|^2$$



$$\text{dist}(v, U) =$$

$$\min_{u \in U} \|v - u\|$$

$$\|v - u\|^2 = \underbrace{\|v - \text{pr}_U(v)\|}_{\in U^\perp}^2 + \underbrace{\|\text{pr}_U(v) - u\|}_{\in U}^2$$

$$= \|v - \text{pr}_U(v)\|^2 + \|\text{pr}_U(v) - u\|^2$$

$$\geq \|v - \text{pr}_U(v)\|^2 + 0$$

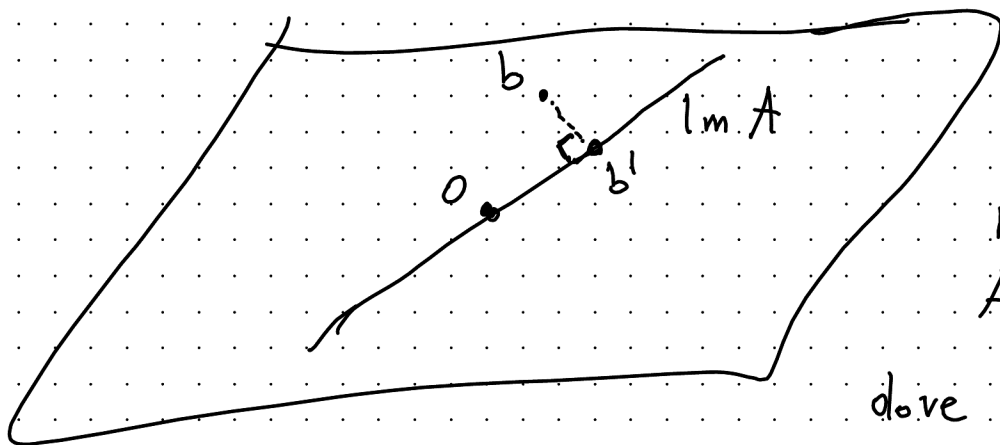
e l'uguaglianza è verificata se $u = \text{pr}_U(v)$

$$\min_{u \in U} \|v - u\| = \|v - \text{pr}_U(v)\|.$$

Es: Supponiamo di avere un sistema

$$Ax = b \quad \text{non risolubile}$$

dominio di A



$$\text{risolvo} \\ Ax = b'$$

$$\text{dove } b' = \text{pr}_{\text{Im } A}(b)$$

Per ottenere la proiezione ortogonale

nel caso in cui $(V, s) = (\mathbb{R}^n, \cdot)$

abbiamo visto che se $U = \langle q_1, \dots, q_r \rangle$
ortonormali, bastava fare $Q \cdot Q^t$

Vogliamo ora sviluppare una formula generale

$U = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ base di U qualsiasi

$$A = \left(v_1 \mid \dots \mid v_r \right) \in \text{Mat}_{n \times r}$$

$$\text{rg } A = r$$

Dato $v \in \mathbb{R}^n$ voglio calcolare $\text{pr}_{\text{Im}A}(v)$

$$\mathbb{R}^n = \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$$

$$v = \underbrace{\text{pr}_{\text{Im}A}(v)}_{\text{Im}A} + \underbrace{(v - \text{pr}_{\text{Im}A}(v))}_{\text{Im}A^\perp}$$

$$\exists y : \text{pr}_{\text{Im}A}(v) = Ay$$

ci serve anche che $v - Ay$ sia ortogonale a $\text{Im}A$

$$\forall z, \quad Az \cdot (v - Ay) = 0$$

$$(Az)^t (v - Ay) = 0 \quad \forall z$$

$$\underbrace{z^t}_{\forall z} \underbrace{A^t (v - Ay)}_{=0} = 0 \quad \forall z$$

$$A^t(v - Ay) = 0$$

$$A^t v = A^t A y$$

ma siamo interessati in Ay

($A^t A$ è una matrice quadrata $r \times r$)

Parentesi:

Teorema: Sia $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$

allora $\text{rg } A = \text{rg } A^t A$

Dim: in realtà $\ker A = \ker A^t A$

\subseteq è ovvio

\supseteq : sia $x \in \ker A^t A$

$$A^t A x = 0$$

quindi:

$$\|Ax\| = 0$$

$$\underbrace{x^t A^t}_{(Ax)^t} Ax = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax = 0$$

$$(Ax)^t Ax = 0$$

abbiamo scoperto
che $x \in \ker A$

$$Ax \cdot Ax = 0$$

ora teorema della dimensione:

$$\text{per } A: \quad n = \dim \ker A + \text{rg } A$$

$$A^t A: \quad n = \dim \ker A^t A + \text{rg } A^t A$$

$$\text{rg } A = \text{rg } A^t A$$

$$A^t v = A^t A y$$

ora sappiamo che $A^t A$ è invertibile

(ricordo che avevamo scelto $\text{rg} A = r$)

$$A y = A \cdot y = A \underbrace{(A^t A)^{-1} (A^t A)} y = \underbrace{A (A^t A)^{-1} A^t} v$$

$$\text{PF}_{\text{Im} A}(v) = \underbrace{A (A^t A)^{-1} A^t} v$$

è la matrice di proiezione orto.
su $\text{Im} A$.

Es per casa: usare questa formula generale
per ottenere la formula precedente.

$$Q Q^t$$

Esempio su \mathbb{R}^3

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A (A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left((1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1 \ 1 \ 1)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Disuguaglianze con le distanze

(V, s) spazio euclideo

La disuguaglianza fondamentale è

$$\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V \quad (= 0 \Leftrightarrow v = 0)$$

Teorema (Cauchy-Schwarz):

$$u, v \in V \quad |u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

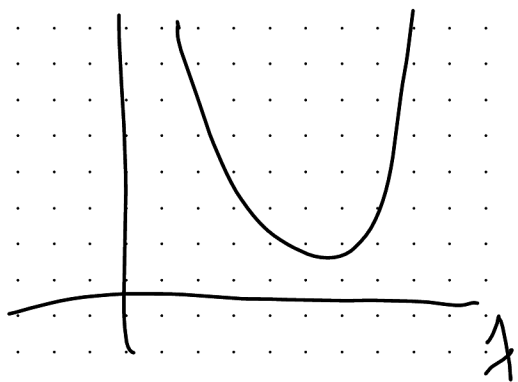
($= 0 \Leftrightarrow u, v$ sono linear. dip.)

Dim: $u + \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

sappiamo che

$$\|u + \lambda v\| \geq 0$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u + \lambda v\|^2 &= s(u + \lambda v, u + \lambda v) \\ &= s(u, u) + \lambda s(u, v) + \lambda s(v, u) + \lambda^2 s(v, v) \\ &= \|u\|^2 + 2\lambda s(u, v) + \lambda^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$



(se $v = 0$ allora esercizio)

$$\Delta \leq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0 \Leftrightarrow s(u, v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

$$s(u, v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

quindi $|s(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

e l'uguaglianza si ha solo per

$$u + \lambda v = 0 \quad (u, v \text{ sono lin. dip.})$$
$$(\text{opp. } v = 0 \quad \text{,,} \quad)$$

Conseguenza di C-S:

$$u, v \in (V, s)$$

$$f(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

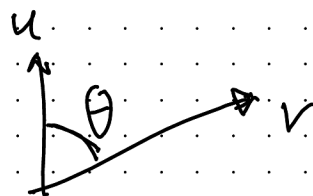
$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (\text{C-S})$$

$$-1 \leq f(u, v) \leq 1$$

$$f(u, v) = 0 \quad \text{se } u \perp v$$

$$f(\lambda u, v) = f(u, v) \quad \text{purché } \lambda > 0$$

$$\Rightarrow \exists \theta : f(u, v) = \cos(\theta)$$



Definiamo l'angolo fra u, v

come l'angolo θ : $\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

$$\theta \in [0, \pi]$$