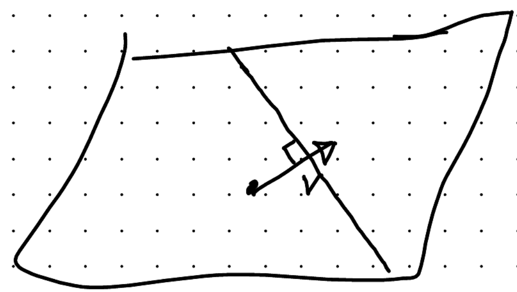
Geometria Euclidea in $\mathbb{R}^2$

Abbiamo introdotto $\cdot$ (prod. scalare std.)

Una retta può essere espressa

- f. param.
- f. cartesiana



$$\underbrace{ax+by}_{(a\ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = c \iff v \cdot x = c$$

$$(a\ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Asse di un segmento

$p, q \in \mathbb{R}^2$

Qualı sono gli $x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \|x-p\| = \|x-q\|$

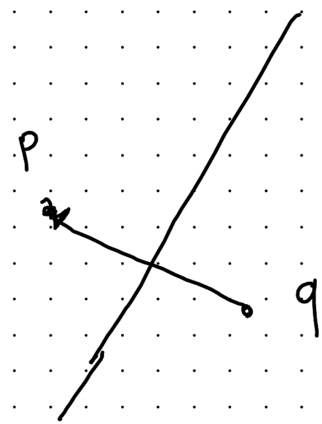
$$\|x-p\|^2 = (x-p)\cdot(x-p) = \cancel{x^2} - 2x\cdot p + p^2$$

$$\|x-q\|^2 = \cancel{x^2} - 2x\cdot q + q^2$$

$$\underbrace{2(p-q)}_{v}\cdot x = p^2 - q^2$$

$$v \cdot x = p^2 - q^2$$

$$x = \frac{p+q}{2} \in \text{asse}$$



Bisettrice di 2 rette

$r_1 : v_1 \cdot x = c_1$

$r_2 : v_2 \cdot x = c_2$

Quali sono i punti equidistanti da r_1 e r_2

$$\mathrm{dist}(x, r_1) = \mathrm{dist}(x, r_2)$$

assumiamo di avere $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$

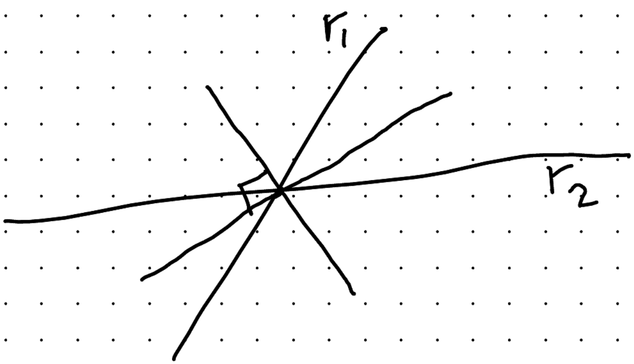
$\mathrm{dist}(x, r_1) = |v_1 \cdot x - c_1|$ perché v_1 ha norma 1

$$|v_1 \cdot x - c_1| = |v_2 \cdot x - c_2|$$

$$|v_1 \cdot x - c_1| = |v_2 \cdot x - c_2|$$

$$v_1 \cdot x - c_1 = \pm(v_2 \cdot x - c_2)$$

$$\underbrace{(v_1 - v_2)} \cdot x = c_1 - c_2 \quad \vee \quad \underbrace{(v_1 + v_2)} \cdot x = c_1 + c_2$$



$$(v_1 - v_2) \cdot (v_1 + v_2) = v_1^2 - v_2^2 = 1 - 1 = 0$$

Isometrie di $\mathbb{R}^2$

Come sono fatte le trasformazioni di $\mathbb{R}^2$ che preservano $dist(x, y)$.

Def: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice "isometria" se preserva tutte le distanze

- $dist(f(x), f(y)) = dist(x, y)$
- $\| f(x) - f(y) \| = \| x - y \|$

Oss: se f è isometria allora f è iniettiva

se $f(x) = f(y)$, $0 = \| f(x) - f(y) \| = \| x - y \| \Rightarrow x = y$

Traslazioni:

$$x \longmapsto x + v$$

$$T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T_v(x) = x + v$$

sono ovviamente isometrie

$$\|(x+v) - (y+v)\| = \|x-y\|$$

T_v non è lineare

supponiamo di avere f isometria

non è detto che $f(0) = 0$

$v_0 = f(0)$

e costruiamo $\tilde{f}(x) = f(x) - v_0 = T_{-v_0}(f(x))$

ora possiamo chiederci se $\tilde{f}$ è lineare

e la risposta è sì!

Teorema: Ogni isometria di $\mathbb{R}_2$

è composizione di una isometria lineare e una traslazione.

$$\left(\tilde{f} = T_{-v_0} \circ f \ , \quad f = \underset{\text{traslazione}}{T_{v_0}} \circ \underset{\text{lineare}}{\tilde{f}} \right)$$

Isometrie lineari di $\mathbb{R}^2$

preservano il prodotto scalare

sia f isometria lineare

$$\|f(x)-f(y)\|^2 = \|x-y\|^2$$

$$\cancel{\|f(x)\|^2} - 2\,f(x)\cdot f(y) + \cancel{\|f(y)\|^2} = \cancel{\|x\|^2} - 2x\cdot y + \cancel{\|y\|^2}$$

$$\underset{\|f(x)\|}{\|f(x)-f(0)\|} = \|x-0\| = \|x\|$$

$$\Rightarrow \quad f(x)\cdot f(y) = x\cdot y$$

Osservazione:

una volta che abbiamo introdotto il prod. scal.

abbiamo un modo per parlare di:

- ortogonalità
- distanze
- angoli

se f preserva il prod. scal.

preserva tutte le sue conseguenze

v, u t.c. $v \perp u \iff v \cdot u = 0$

$f(v) \cdot f(u) = v \cdot u = 0$

Cosa vuol dire che

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \ ?$$

scriviamo tutto in forma matriciale

sappiamo infatti che $f(x) = Ax$

$$(Ax)^t Ay = x^t y$$

$$x^t A^t A y = x^t y = x^t \mathbb{1} y \quad \forall x, y$$

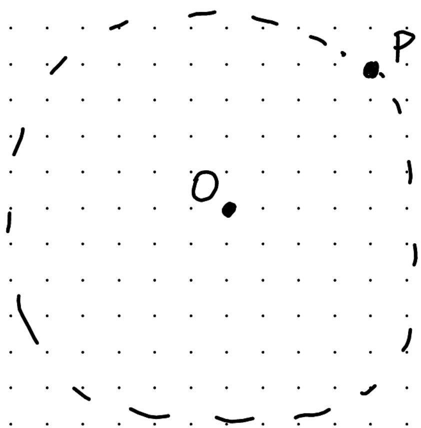
$$\Rightarrow \quad A^t A = \mathbb{1}$$

Def: Una matrice A si dice "ortogonale"

se $A^t A = \mathbb{1}$

Quindi le mappe lineari associate a matrici ortogonali sono isometrie.

Come sono fatte le isometrie lineari in $\mathbb{R}^2$?

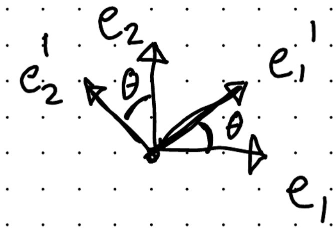


- le rotazioni sono isometrie attorno a O

- le riflessioni rispetto una retta per l'origine sono isometrie

Come è fatta la matrice di rotazione di un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$?

Per costruire A, costruiamo



$$A^1 = \text{rotazione}_\theta (e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \quad '' \quad (e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che è ortogonale:

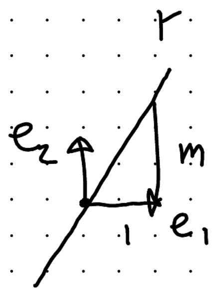
$$R_\theta^t \cdot R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} R_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2+\sin^2 & 0 \\ 0 & \sin^2+\cos^2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{1}$$

Vediamo le riflessioni

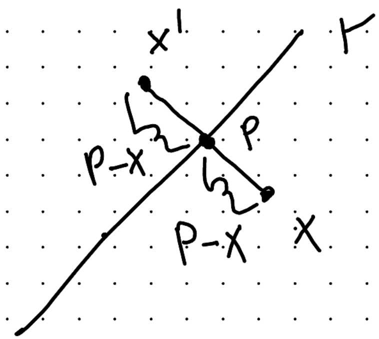
$r: \ ax + by = 0$

$$y = mx \quad \vee \quad x = 0$$



Q_m matrice di riflessione

$$Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$



Per casa: ricavare Q_m

riflessione rispetto $x=0$

$$Q_{\infty} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come faccio a sapere che le isometrie di $\mathbb{R}^2$ sono tutte di queste forme?

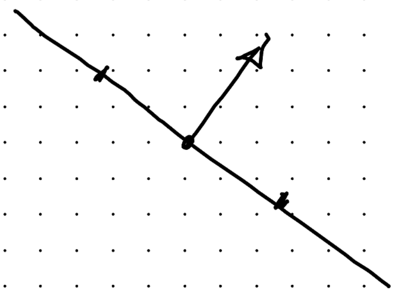
$$A^t A = \mathbb{1} \quad , \text{con } A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Dare A è equivalente a dare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$

- scegliamo un versore qualsiasi $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

- scegliamo un altro versore ortogonale al primo

$$\pm\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$$



Esercizio per casa:

mostrare che una scelta del segno mi dà le rotazioni mentre l'altra mi dà le riflessioni

Bonus: mostrare che $m = \operatorname{tg}\theta/2$

Geometria euclidea di $\mathbb{R}^3$

Vogliamo identificare V_0^3 con $\mathbb{R}^3$

Scegliamo una base di V_0^3, $\mathcal{B}$

e questo fornisce $F_{\mathcal{B}}: V_0^3 \to \mathbb{R}^3$

per rispettare il prodotto scalare scegliamo $\mathcal{B}$ ortonormale

la indichiamo con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in V_0^3$

Prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$

$\wedge$

Prendiamo u, v, x in $\mathbb{R}^3$

$$\det(u|v|x) = f(u,v,x)$$

se fisso u, v è lineare in $x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

quindi: $f_{u,v}(x) = (a \; b \; c)\, x$

e quindi: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot x = f_{u,v}(x)$

chiamo $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = u \wedge v$

e' il prodotto vettore di u e v.

Esempio

e_1, e_2, x

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} = x_3 = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e quindi: $e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$

Calcoliamo le coordinate in generale

$$\det(u|v|x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$\det\left(u \middle| v \middle| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right)$$

se sviluppo con Laplace sulla 3 colonna ottengo

$$x_1 C_{1,3} - x_2 C_{2,3} + x_3 C_{3,3} = a x_1 + b x_2 + c x_3$$

$$a = C_{1,3} \qquad c = C_{3,3}$$
$$b = -C_{2,3}$$

Def: il prodotto misto di $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

è dato da $(u \wedge v) \cdot w$

è equivalente a $\det(u \mid v \mid w)$.

Proprietà di $u \wedge v$

- $u \wedge v = - v \wedge u$ (antisimmetria)
- è bilineare

$(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$ (segue subito dalla multilin. di det)

- (attenzione) non è associativo:

$$(u \wedge v) \wedge w \neq u \wedge (v \wedge w)$$

e_1, e_2, e_2

$$(e_1 \wedge e_2) \wedge e_2 = e_3 \wedge e_2 = -e_1$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

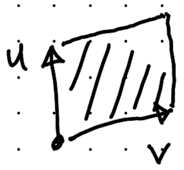
$$e_1 \wedge (e_2 \wedge e_2) = e_1 \wedge 0 = 0$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $u \wedge v = 0 \iff u, v$ sono lin. dip.

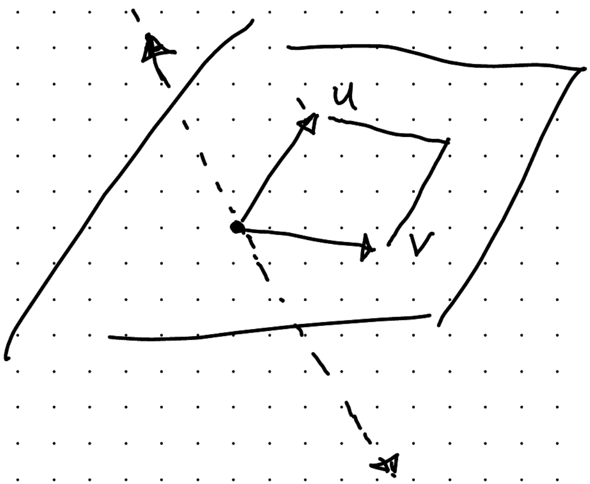
$$\det(u \mid v \mid x) = 0 \quad \forall x$$

- $\| u \wedge v \| =$ area del parallelogramma che ha per lati u, v



- $u \wedge v$ è ortogonale a u e v

$$(u \wedge v) \cdot u = \det(u | v | u) = 0$$

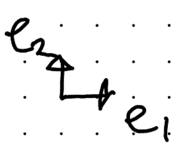


Orientazione di uno spazio vettoriale reale.

Quando abbiamo parlato di det: $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

abbiamo interpr. il det come rapporto fra aree orientate

L'orientazione è data da una base a meno di cambi di base con $\det > 0$



b_1, b_2 è orientata come e_1, e_2

se $\det(b_1 | b_2) > 0$

In $\mathbb{R}^3$ abbiamo e_1, e_2, e_3

dicamo che b_1, b_2, b_3 è "equiversa"

se $\det(b_1 | b_2 | b_3) > 0$

dicamo che è "contraversa" se $\det < 0$

Il prodotto vettore soddisfa:

$u, v, u \wedge v$ è sempre equiversa

In generale dato $\det(A)$

interpretiamo $|\det A|$ come rapporto di volumi

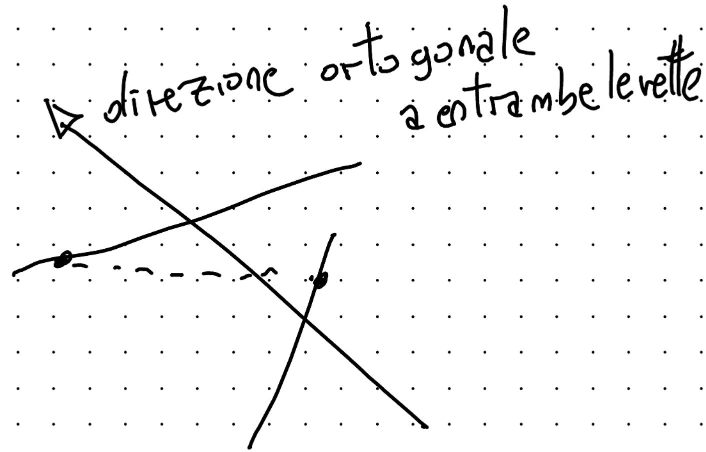
e segno$(\det A)$ come $\begin{cases} +1 & \text{stessa orient.} \\ -1 & \text{orient. contraria} \end{cases}$

Distanze fra sottospazi affini

distanza fra 2 rette sghembe

$r_1: X_1 + \langle v_1 \rangle$

$r_2: X_2 + \langle v_2 \rangle$



$\mathrm{dist}(r_1, r_2)$

- ~~normalizziamo v_1, v_2~~

  ~~$\|v_1\| = \|v_2\| = 1$~~

- calcoliamo $v_1 \wedge v_2$

- normalizziamo $v_1 \wedge v_2$: $\dfrac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|}$

- $\forall x \in r_1 \qquad x \cdot \dfrac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|} = c_1$

  $\forall x \in r_2 \qquad x \cdot \dfrac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|} = c_2$

la distanza fra r_1, r_2 è $|c_1 - c_2|$

$|(x_1 - x_2) \cdot (v_1 \wedge v_2)|$ è la distanza cercata.

Quindi: $\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \left| (x_1 - x_2) \cdot \dfrac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|} \right| =$

$$= \frac{|\det(x_1 - x_2 | v_1 | v_2)|}{\|v_1 \wedge v_2\|}$$