Sia V uno sp. vettoriale f.g. su un campo $\mathbb{K}$.
Sia $\mathcal{L}: V \longrightarrow V$ un endomorfismo lineare.
Diciamo che $\mathcal{L}$ è <u>diagonalizzabile</u> se esiste una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V nella quale $\mathcal{L}$ è rappresentato da una matrice diagonale D.
Quindi se

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K}).$$

allora

$$\boxed{\mathcal{L}(v_i) = \lambda_i v_i}$$

<u>Es</u>: 1) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è diag. $\Leftrightarrow \theta = 0$ o $\theta = \pi$

2) $Q_m = \dfrac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile.

Autovettori e autovalori

per $\mathcal{L} : V \to V$

<u>Def</u>: Un <u>autovettore di autovalore λ</u> v è un vettore $v \in V$, non-nullo t.c.

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v$$

$\mathcal{L}$ è diagonalizzabile $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ esiste una base di V composta di autovettori di $\mathcal{L}$.

Se $\mathcal{C} = \{w_1, .., w_n\}$ è una base di V e A è la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{C}$, allora $\mathcal{S}_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ è diagonalizzabile se e solo se $\mathcal{L}$ lo è.

$\Rightarrow$ Basta che lavoriamo con matrici $n \times n$.

Una matrice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ si dice diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\boxed{A v_i = \lambda_i v_i}$$

<u>Problema</u>: Come sono fatte le matrici diagonalizzabili?

Quand'è che una matrice ammette almeno un autovettore?

<u>Es</u>: .) Sia $T = \begin{pmatrix} t_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & t_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$.

$T e_1 = T^1 = t_{11} e_1 \Rightarrow e_1$ è un autovettore di T.

.) R_θ non ha autovettori in $\mathbb{R}^2$ se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$.

Sia v un autovettore per A. Allora questo vuol dire che $v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ e esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale

$$Av = \lambda v.$$

$$\Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda \mathbb{1}_n) v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad v \in \operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

A ammette un autovettore di autovalore λ se e solo se $\operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ se e solo se $\det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0$

Studiamo la funzione $P_A(x) := \det(x \mathbb{1}_n - A)$

$$P_A : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : x \mapsto \det(x \mathbb{1}_n - A) = P_A(x).$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_2 - A) = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)(x-2)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc$$

$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

$$= x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$(x\,\mathbb{1}_3 - A)$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -4 & x-3 \end{pmatrix}$$

sviluppo la 1ª colonna

$$= (x-1)\det\begin{pmatrix} x-2 & -2 \\ -4 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)\left[(x-2)(x-3)-8\right]$$

$$= (x-1)\left[x^2 - \underbrace{5}_{\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} x \underbrace{-2}_{\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}\right]$$

$$= x^3 - 6x^2 + 3x + 2$$

$p_A(x)$ è un polinomo monico (=il coefficiente del monomio di grado massimo è 1) di grado 3.

Prop.: Sia $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.). Allora

$$P_A(x) = x^3 - Tr(A)\,x^2 + \frac{1}{2}\left[Tr(A)^2 - Tr(A^2)\right]x - \det A$$

dim (Appunti). è un conto.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 2$$

$$Tr(A) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$Tr(A^2) \overset{!}{=} A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3$$

$$= 1 + 12 + 17 = 30$$

$$Tr(A)^2 = 6^2 = 36$$

$$\frac{1}{2}\left[Tr(A)^2 - Tr(A^2)\right] = 3$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -2$$

Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ allora

$$p_A(x) = \det(x\mathbb{1}_n - A)$$

è un polinomio monico di grado n della forma

$$p_A(x) = x^n - Tr(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

<u>Def</u>: Il polinomio $p_A(x)$ si chiama il <u>polinomio caratteristico</u> di A

Quindi,

$\exists$ un autovettore di autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$ per A se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico di A.

Spettro di una matrice

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Lo <u>spettro di A</u> è l'insieme degli autovalori di A

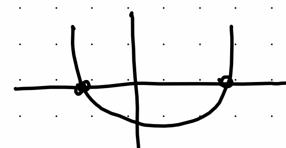
$$Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists\, v \neq 0_{\mathbb{K}^n} \text{ t.c. } Av = \lambda v\}$$

Per l'osservazione,

$$Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda) = 0\}$$
$$= \{\text{radici del polinomio } p_A(x)\}$$

<u>Es</u>: Se $n=2$, $p(x) = ax^2 + bx + c$, le radici sono

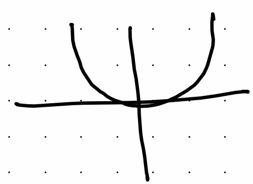
$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$\Delta > 0$

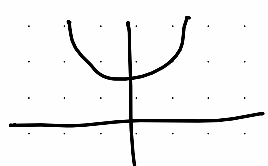
$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Delta = b^2 - 4c$: discriminante



$\Delta = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2$



$\Delta < 0$

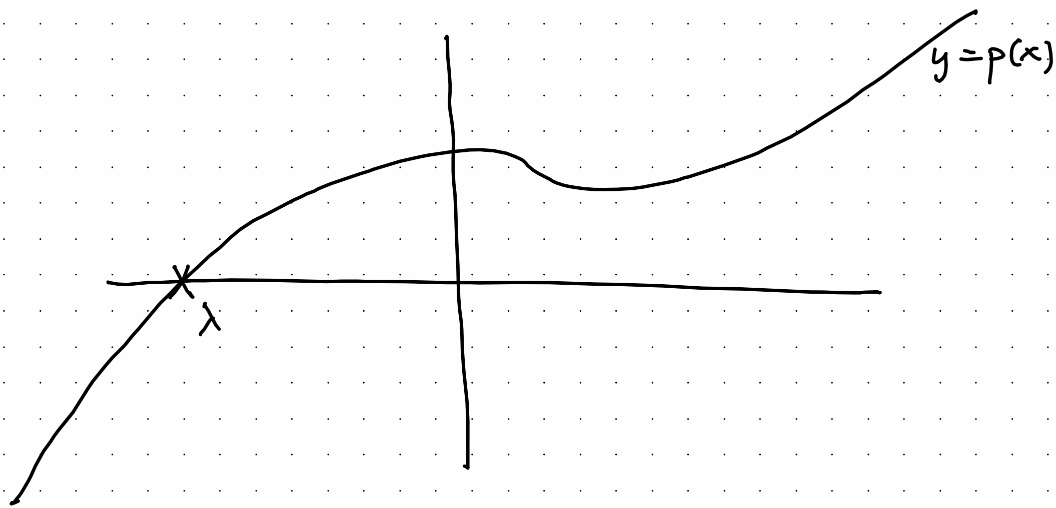
non ci sono radici reali

Le radici di $p(x) = ax^2 + bx + c$ sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Se $\Delta < 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Se $p(x)$ ha grado 3, allora p ha almeno una radice reale



Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$.

Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ distinti e $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$p(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$$

Il numero m_i si chiama la <u>molteplicità algebrica</u> di λ_i come radice di $p(x)$.

Es: $R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$.

$$P_{R_\vartheta}(x) = x^2 - 2\cos\vartheta + 1$$

$$P_{R_\vartheta}(x) = 0 \iff x_{1,2} = \frac{2\cos\vartheta \pm \sqrt{4\cos^2\vartheta - 4}}{2}$$

$$= \cos\vartheta \pm \sqrt{\cos^2\vartheta - 1}$$

$$= \cos\vartheta \pm \sqrt{-\sin^2\vartheta}$$

$$= \cos\vartheta \pm i \sin\vartheta.$$

$$Sp(R_\vartheta) = \{\cos\vartheta + i\sin\vartheta, \cos\vartheta - i\sin\vartheta\}.$$

$Sp(R_\vartheta) \subset \mathbb{R} \iff \sin\vartheta = 0 \iff \vartheta = 0$ o $\vartheta = \pi$.

Spettro reale di una matrice

$$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid p_A(\lambda) = 0\}.$$

Es:

$$Sp_{\mathbb{R}}(R_\theta) = \emptyset \quad \text{se} \quad \theta \neq 0 \text{ e } \theta \neq \pi.$$

OSS: Se $\lambda \in Sp(A)$, $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \mathbb{R}$ allora A non è <u>diagonalizzabile su $\mathbb{R}$</u> (i.e. come endomorfismo di $\mathbb{R}^n$).

Prop.: Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine:

$$P_{B^{-1}AB}(x) = P_A(x)$$

per ogni B invertibile, per ogni A.

dim:

$$P_{B^{-1}AB}(x) = \det(x\mathbb{1}_n - B^{-1}AB)$$

$$= \det(x\,B^{-1}B - B^{-1}AB)$$

$$= \det(B^{-1}(x\mathbb{1}_n - A)B)$$

$$\overset{\text{Binet}}{=} \det(x\mathbb{1}_n - A) = P_A(x).$$

$\blacksquare$

Molteplicità geometrica

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sia $\lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$.
Il sottospazio vettoriale

$$\ker(\lambda \mathbb{1}_n - A) \subseteq \mathbb{K}^n$$

ha come vettori non-nulli gli autovettori di A di autovalore λ.

Notazione: $V_\lambda(A) := \ker(\lambda \mathbb{1}_n - A) \subset \mathbb{K}^n$.

Def: $V_\lambda(A)$ si chiama l'autospazio di A di autovalore λ.

Def: La molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$ è per definizione la dimensione di $V_\lambda(A)$:

$$\boxed{mg_A(\lambda) = \dim V_\lambda(A)}$$

La <u>molteplicità algebrica</u> dell'autovalore λ è la sua molteplicità come radice di $p_A(x)$. e la denotiamo con

$$ma_A(\lambda).$$

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad Sp(A) = \{1\} \subset \mathbb{R}.$$

$$ma_A(1) = 2$$

$$mg_A(1) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_2 - A) = \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Prop.: Sia $\lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$. Allora
$$mg_A(\lambda) \leq ma_A(\lambda)$$

dim:
Sia $\{v_1, .., v_k\}$ una base di $V_\lambda(A) \subset \mathbb{K}^n$.
(quindi $k = mg_A(\lambda)$). Allora
$$(*) \quad Av_i = \lambda v_i \qquad \forall i = 1, .., k.$$
Estendiamola ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_k, v_{k+1}, .., v_n\}$ di $\mathbb{K}^n$. Sia C la matrice che rappresenta S_A nella base $\mathcal{B}$. In virtù di $(*)$, C ha la forma
$$C = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_k & L \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$$
Dato che
$$C = B^{-1} A B$$
dove $B = (v_1 | .. | v_n)$, si ha che $p_A(x) = p_C(x)$

$$C = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_k & L \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det A \det C.$$

$$P_A(x) = P_C(x) = \det(x\mathbb{1} - C)$$

$$= \det\left(\begin{array}{c|c} (x-\lambda)\mathbb{1} & -L \\ \hline 0 & x\mathbb{1} - M \end{array}\right) =$$

$$= \det((x-\lambda)\mathbb{1}_n) \det(x\mathbb{1} - M)$$

$$= (x-\lambda)^k P_M(x)$$

$$\Longrightarrow \quad k \leq ma_A(\lambda). \qquad \blacksquare$$

__Teorema__ :

$A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$

se e solo se

1) $Sp(A) = Sp(A)_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{K}$

2) $mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$.

__dim__:

$\Rightarrow$) Se A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ allora esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{K}^n$ composta di autovettori di A.

$\Rightarrow \exists$ B invertibile e $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ t.c.

$$B^{-1}AB = D$$

$(B = (v_1 | \dots | v_n))$. $\Rightarrow Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$

$$mg_A(\lambda) = \dim V_\lambda(A) = \dim V_\lambda(B^{-1}AB) = \dim V_\lambda(D)$$
$$= ma_A(\lambda).$$

Viceversa, se $Sp(A) \subset \mathbb{K}$ e $mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(A)$

Siano $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_K$ gli autovalori distinti di A.

Dimostriamo che

$$V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_K}(A) = \mathbb{K}^n$$

Infatti,

$$V_{\lambda_i}(A) \cap V_{\lambda_j}(A) = \{ 0_{\mathbb{K}^n} \} , \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

$$\left(\text{se} \quad Av = \lambda_i v , \ Av = \lambda_j v \Rightarrow \lambda_i v = \lambda_j v \Rightarrow v = 0_{\mathbb{K}^n}. \right)$$

$$\dim \left(V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_K}(A) \right)$$

$$= \dim V_{\lambda_1}(A) + \dots + \dim V_{\lambda_K}(A)$$

$$= mg_A(\lambda_1) + \dots + mg_A(\lambda_K)$$

$$= ma_A(\lambda_1) + \dots + ma_A(\lambda_K) = n.$$

Es:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & & & * \\ & t_{22} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_T(x) = (x-t_{11})(x-t_{22})\dots(x-t_{nn})$$

$$Sp(T) = \{t_{11}, t_{22}, \dots, t_{nn}\}.$$

$ma_T(t_{ii}) =$ # volte che t_{ii} compare sulla diagonale.

Se sono tutti distinti, allora T è diagonalizzabile, perché

$$mg_T(t_{ii}) \leq ma_T(t_{ii}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad mg_T(t_{ii}) = ma_T(t_{ii}) = 1$$