Annunci: •) Compilare ~~il~~ i moduli OPIS di valutazione del corso. Trovate il codice sulla pagina web.

Il vostro giudizio è importante!

•) Esami: In presenza o da remoto.

In contemporanea: 3 ore.

Annullare la prenotazione se si pensa di non venire.

Ricevimento: si

Abbiamo dimostrato:

Teorema: Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (i.e. $S_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile) se e solo se

1) $Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid p_A(\lambda) = 0 \} \subset \mathbb{R}$

2) $ma_A(\lambda) = mg_A(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$.

In questo caso,

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}(A)$$

dove $\lambda_i \neq \lambda_j \in Sp(A)$ e

$$V_\lambda(A) = Ker(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$ = autospazio relativo all'autovalore λ.

OSS: Il Teorema vale per ogni campo $\mathbb{K}$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la condizio 1 è ~~vuo~~ ridondante.

$A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$. Per capire se A è diagonalizzabile:

1) Trovare le radici del polinomio caratteristico

$$p_A(x) = \det(x \mathbb{1}_n - A).$$

2) $\forall \lambda \in Sp(A)$, Trovare una base $\mathcal{B}_\lambda$ di

$$V_\lambda(A) = Ker(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

$Sp(A) = \{\lambda_1, .., \lambda_r\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, se

$$\dim V_{\lambda_1}(A) + \dim V_{\lambda_2}(A) + .. + \dim V_{\lambda_k}(A) = n$$

allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se $\lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Per Trovare una base diagonalizzante

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup .. \cup \mathcal{B}_{\lambda_r}.$$

<u>COR</u>: Se gli autovalori di A sono reali e tutti distinti allora A è diagonalizzabile.

<u>Es</u>:

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & t_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \qquad t_{ii} \neq t_{jj}.$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Es: Stabilire se $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.

Sol.:

$$P_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}A\, x + \det A = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$\Rightarrow Sp(A) = \{3, -3\}$. A ha 2 autovalori (distinti) e quindi è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$V_3(A) = \mathrm{Ker}\,(3\mathbb{1}_2 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \ker(1, -5) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-3}(A) = \mathrm{Ker}\,(-3\mathbb{1}_2 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker(1, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Una base di autovettori è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

In questa base A si scrive come

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = B^{-1} A B \quad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es: Stabilire se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D t.c. $B^{-1}AB = D$.

Sol.:

$$P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -x+1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & x-3 & -2 \\ -x+1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-3 & -2 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-1)\big((x-3)(x-2) - 2\big) =$$

$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6 - 2) = (x-1)(x^2 - 5x + 4)$$

$$P_A(x) = (x-1)(x^2-5x+4) \qquad \left[A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$P_A(x) = (x-1)^2(x-4)$$

$$Sp(A) = \{1, 4\}. \qquad ma_A(1) = 2 \;, \; ma_A(4) = 1$$

$$V_1(A) = \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_3 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}(1,1,1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$mg_A(1) = \dim V_1(A) = 2 = ma_A(1)$$

$$mg_A(4) \leq ma_A(4) = 1 \Rightarrow mg_A(4) = ma_A(4) = 1$$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$V_4(A) = \operatorname{Ker}(4\mathbb{1}_3 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

Il blocco di Jordan

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$Sp(J_n(\lambda)) = \{\lambda\} \qquad ma(\lambda) = n$$

$$mg(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - J_n(\lambda))$$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Se $n > 1$, $J_n(\lambda)$ non è diagonalizzabile in nessun campo.

Diagonalizzazione ortogonale

Come sono fatte le matrici $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ che ammettono n assi di simmetria a due a due ortogonali?

Teorema spettrale (reale) o degli assi principali

Esse sono le matrici simmetriche.

Matrici ortogonali

Ricordiamo che una matrice $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ si dice <u>ortogonale</u> se

$$B^t B = \mathbb{1}_n$$

ovvero

$$B^{-1} = B^t.$$

$B = (E_1 | \dots | E_n)$ è ortogonale se e solo se

$$E_i \cdot E_j = 0 \quad \text{se } i \neq j, \ \forall i,j = 1, \dots, n.$$

$$E_i \cdot E_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$\Leftrightarrow$ $\{E_1, \dots, E_n\}$ è una base <u>ortonormale</u> di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

Diagonalizzazione ortogonale

Def: Una matrice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice **ortogonalmente diagonalizzabile** se esiste una base **ortonormale** di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A.

OSS: A è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice ortogonale B t.c. $B^t A B = D$, dove D è una matrice diagonale.

Teorema spettrale (reale)

Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $A = A^t$.

dim: Se A è ort. diag. allora $\exists$ B ortogonale t.c.

$$B^t A B = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Allora $\quad A = (B^t)^{-1} D B^{-1} = (B^t)^t D B^t = B D B^t$

$\Rightarrow \quad A^t = (B D B^t)^t = (B^t)^t D^t B^t = B D B^t = A.$

$\Rightarrow$ A è simmetrica.

Supponiamo che $A = A^t$. Dimostriamo che

$$(*) \quad \mathbb{R}^n = V_{\lambda_1}(A) \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_2}(A) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}(A)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di A.

$\overset{\perp}{\oplus}$ = somma diretta ortogonale.

Per dimostrare (*) serve dimostrare:

1) $Sp(A) \subset \mathbb{R}$

2) $V_\lambda(A) \perp V_\mu(A)$ se $\lambda \neq \mu \in Sp(A)$.

3) $mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda)$

1): Sia $\lambda \in Sp(A)$. Allora $\exists\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, $X \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ t.c.

$$AX = \lambda X$$

Definiamo $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

$$X \cdot \overline{X} = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \dots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$X \cdot \overline{X} = 0 \iff X = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

$$\lambda(X \cdot \overline{X}) = \lambda X^t \overline{X} = (\lambda X)^t \overline{X} = (AX)^t \overline{X} =$$

$$= X^t A^t \overline{X} \underset{A = A^t}{=} X^t A \overline{X} \underset{A \text{ è reale}}{=} X^t \overline{A}\,\overline{X} = X^t \overline{AX} = \overline{\lambda}\, X \cdot \overline{X}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \; X \cdot \overline{X} = \overline{\lambda} \; X \cdot \overline{X}$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - \overline{\lambda}) \; X \cdot \overline{X} = 0$$

$$\underset{X \neq 0_{\mathbb{C}^n}}{\Rightarrow} \quad \lambda - \overline{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad Sp(A) \subset \mathbb{R}.$$

2) Siano $\lambda \neq \mu \in Sp(A)$. Allora $V_\lambda(A) \perp V_\mu(A)$.

Infatti, sia $v \in V_\lambda(A)$ e $w \in V_\mu(A)$

$$\Rightarrow \quad v \cdot Aw = v \cdot \mu w = \mu \; v \cdot w$$

$$v \cdot Aw = v^t A w \underset{A = A^t}{=} v^t A^t w = (Av)^t w = (\lambda v)^t w = \lambda \; v \cdot w$$

$$\Rightarrow \quad \mu \; v \cdot w = \lambda \; v \cdot w \quad \Rightarrow \quad v \cdot w = 0.$$

3) Sia $\lambda \in Sp(A)$. Sia $W = V_\lambda(A)^\perp$.

Allora $\mathbb{R}^n = V_\lambda(A) \overset{\perp}{\oplus} W$.

$\forall w \in W$, $Aw = v + w'$ con $v \in V_\lambda(A)$ e $w' \in W$

$\Rightarrow$ $v \cdot Aw = v \cdot (v + w') = v \cdot v + v \cdot w' \underset{\substack{\uparrow \\ w' \in V_\lambda(A)^\perp}}{=} v \cdot v$

Dall'altronde,

$$v \cdot Aw = Av \cdot w = \lambda v \cdot w = \lambda (v \cdot w) \overset{w \in W = V_\lambda(A)^\perp}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $v \cdot v = 0$ $\Rightarrow$ $v = 0_V$

$\Rightarrow$ $\boxed{Aw \in W \quad \forall w \in W}$

$\Rightarrow$ W è A-invariante.

Se $\mathcal{B}_1$ è una base di $V_\lambda(A)$ e

$\mathcal{B}_2$ è una base di W,

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Dato che W è A-invariante,
la matrice Z che rappresenta A nella base $\mathcal{B}$ è
diagonale a blocchi:

$$Z = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_k & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

dove $k = mg(\lambda) = \dim V_\lambda(A)$

$Z = B^{-1} A B$ dove B ha per colonne gli el. di $\mathcal{B}$

$\Rightarrow \quad P_A(x) = P_Z(x) = (x-\lambda)^k P_C(x)$

poiché λ non è un autovalore di C
(altrimenti W conterrebbe un autovettore
di autovalore λ), concludiamo che $P_C(\lambda) \neq 0$
e quindi $k = ma_A(\lambda)$.

In pratica, data $A = A^t$, per trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A:

1) Trovare le radici di $p_A(x)$ ovvero $Sp(A)$

2) $\forall \lambda \in Sp(A)$, utilizzare Gram-Schmidt per trovare una base ortonormale $\mathcal{B}_\lambda$ di $V_\lambda(A)$.

Allora se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di A,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_k}$$

è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A.

Es:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D t.c. $B^t A B = D$.

Sol.:

$$P_A(x) = x^3 - \mathrm{tr} A\, x^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(A)^2 - \mathrm{Tr}(A^2)\right) x - \det A.$$

$$\mathrm{Tr}\, A = 3\,, \quad \mathrm{Tr}(A)^2 = 9$$

$$\mathrm{Tr}(A^2) = A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = 2 + 5 + 6 = 13$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$$

$$\Rightarrow P_A(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}(9 - 13)\, x + 4$$

$$= x^3 - 3x^2 - 2x + 4$$

$$P_A(1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x^2 - 2x + 4 & x-1 \\
\cline{2-2}
-\ (x^3 - x^2) & x^2 - 2x - 4 \\
\cline{1-1}
-2x^2 - 2x + 4 & \\
-\ (-2x^2 + 2x) & \\
\cline{1-1}
-4x + 4 & \\
-4x + 4 & \\
\cline{1-1}
// &
\end{array}
$$

$$P_A(x) = (x-1)(x^2-2x-4)$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$P_A(x) = (x-1)(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$$

$$Sp(A) = \{1,\ 1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}\}.$$

$$V_1(A) = \mathrm{Ker}\,(\mathbb{1}_3 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$1+\sqrt{5}$ e $1-\sqrt{5}$ sono le radici di x^2-2x-4.

Sia λ t.c. $\lambda^2-2\lambda-4=0$ ovvero $\lambda^2 = 2\lambda+4$

$$V_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbb{1}_3 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ \lambda-1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2(\lambda-1) & -1-(\lambda-1)(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2(\lambda-1) & -1+(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2(\lambda-1) & \cancel{-1}+\lambda^2-2\lambda\cancel{+1} \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2(\lambda-1) & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & (\lambda-1) & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\lambda-1\neq 0}{=} \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\lambda-1} \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\lambda+\frac{4}{\lambda-1} = -\frac{(\lambda-1)^2+4}{\lambda-1} = \frac{-\lambda^2+2\lambda+3}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\lambda-1} \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\lambda-1} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad V_{1+\sqrt{5}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{1-\sqrt{5}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 1+\sqrt{5} \qquad \lambda_3 = 1-\sqrt{5}$$

$$\left\{ E_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix},\ E_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ composta di autovettori per A.

$$B = (E_1 | E_2 | E_3) \qquad B^t A B = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Applicazione alle forme bilineari

Sia $b = b_A$ una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^n$. Allora $A = A^t$.

Per il Teorema spettrale A è diagonalizzabile.

Sia $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_n\}$ una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A. $(AE_i = \lambda_i E_i)$

Allora

$$b_A(E_i, E_j) = E_i^t A E_j = \lambda_j \, E_i \cdot E_j$$

$$\Rightarrow \quad b_A(E_i, E_j) = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

$$b_A(E_i, E_i) = \lambda_i$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_n\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, b_A)$.

In questa base, b_A si scrive come :

$$b_A(X,Y) = \lambda_1 X_1 Y_1 + \lambda_2 X_2 Y_2 + \dots + \lambda_n X_n Y_n .$$

In particolare,

se $\quad sg(b) = sg(A) = (p,q)$

allora

$$p = \text{numero di autovalori positivi di } A$$

$$q = \text{numero di autovalori negativi di } A.$$