Applicazioni della diagonalizzazione

Autovalori e polinomio caratteristico

sono le radici del pol. car.

$A \in Mat_{n \times n}$ $\qquad p_A(x) = \det(x\mathbb{1} - A)$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le radici di $p_A(x)$

$$(x-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \underline{\underline{a_0}}$$

$$(-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (-\lambda_n) = a_0 = \det(-A)$$

$$\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

$$-\lambda_1 - \lambda_2 \ldots - \lambda_n = a_{n-1} = -\mathrm{tr} A$$

$$\mathrm{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

Es:

$$R = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$p_R(x) = x^2 - x + 1$$

Potenze di una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n$$

nel caso di matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

se A è diagonalizz.

$A = B^{-1} D B$ ($\exists$ B invert. t.c.)

$\exists$ D diagonale

$$A^n = (B^{-1} D B)^n = B^{-1} D^n B$$

$$B^{-1} D \cancel{B} \cancel{B^{-1}} D B = B^{-1} D^2 B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = B D B^{-1} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = B \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n \end{pmatrix} B^{-1} = \ldots$$

Teorema di Cayley-Hamilton

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, sia $p_A(x)$ il pol. car.

$$p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

allora

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 \mathbb{1} = 0 .$$

Es: $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $p_R(x) = x^2 - x + 1$

$$R^2 - R + \mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si può usare questa relazione per calcolare le potenze e l'inversa.

$$R^2 - R + \mathbb{1} = 0 \quad \to \quad R^2 = R - \mathbb{1}$$

$$R^3 = R \cdot R^2 = R^2 - R = R - \mathbb{1} - R = -\mathbb{1}$$

$$R^6 = \mathbb{1}$$

$$\mathbb{1} = -R^2 + R = R\underbrace{(-R + \mathbb{1})}_{B}$$

$$\mathbb{1} = R \cdot B$$

quindi B è l'inversa di R

Coniche in $\mathbb{R}^2$

Def: Data una forma bilineare $b(x,y)$ definita su $\mathbb{R}^n$ la "forma quadratica" associata è la funzione

$$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto b(x,x)$$

Ad una forma quadratica associamo la stessa matrice della forma bilineare

$$b(x,y) = x^t A y$$
$$q(x) = x^t A x$$

$q(x)$ in $\mathbb{R}^2$

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\lambda} x_1^2 + \underline{\mu} x_1 x_2 + \underline{\nu} x_2^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu/2 \\ \mu/2 & \nu \end{pmatrix}$$

$$x^t A x = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} \lambda & \mu/2 \\ \mu/2 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

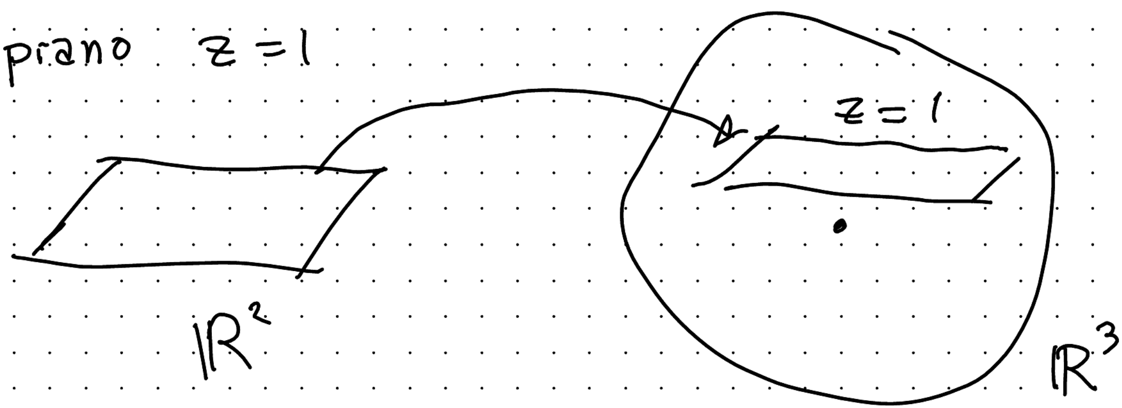
$$= (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \frac{\mu}{2} x_2 \\ \frac{\mu}{2} x_1 + \nu x_2 \end{pmatrix} = \lambda x_1^2 + \frac{\mu}{2} \underline{x_1 x_2} + $$
$$+ \frac{\mu}{2} \underline{x_2 x_1} + \nu x_2^2$$

Per casa: mostrare che la forma bilineare b si scrive come $b(x,y) = \dfrac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$

Def:
Una conica è l'insieme di $\mathbb{R}^2$ dei punti $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ t.c. x, y verificano un'equazione di 2° grado

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta = 0$$

Immergiamo $\mathbb{R}^2$ "affine" dentro $\mathbb{R}^3$ come il piano $z=1$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

per trasformare l'equazione, prima sostituisco $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$ al posto di x, y

e poi, se $z=1$, ritrovo l'equazione di partenza

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta xz + \varepsilon yz + \eta z^2 = 0$$

è una forma quadratica: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 & \delta/2 \\ \beta/2 & \gamma & \varepsilon/2 \\ \delta/2 & \varepsilon/2 & \eta \end{pmatrix} = \hat{A}$

La conica originale è l'insieme dei punti

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{che soddisfano} \begin{cases} z = 1 \\ (x\ y\ z)\,\hat{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$$

$A \in Mat_{2\times2}$, $b \in Mat_{2\times1}$

è sempre simmetrica

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y - 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se cambio coordinate come cambia $\hat{A}$?

Quando 2 matrici $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ individuano la stessa conica (a meno di cambio di coordinate)?

$$\underbrace{x^2 + 3xy}_{A} + \underbrace{y}_{b} \underbrace{- 2}_{c} = 0 \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$xy - 1 = 0 \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Invece che classificare le coniche,
classifichiamo prima le forme quadratiche $\hat{A}$

Possiamo fare 2 tipi di cambi di base:

- affine (lineare + traslazioni)
- metrico (isometria lineare + traslazioni)

Teorema:

A meno di cambi di base metrici, ogni forma $\hat{A}$ si può scrivere come:

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\lambda_1 \geq \lambda_2, c \in \mathbb{R}$
  uno $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_1, b_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

tutte queste forme non sono equivalenti

A meno di cambi di base affini abbiamo solo 9 coniche possibili:

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet & x^2+y^2-1=0 \\ \bullet & x^2-y^2-1=0 \\ \bullet & x^2-y=0 \\ \bullet & x^2+y^2+1=0 \end{array}\right\} \text{non degeneri}$$

- $x^2-y^2=0$
- $x^2+y^2=0$
- $x^2-1=0$
- $x^2+1=0$
- $x^2=0$

Come si cambia di base:

$\mathbb{R}^3$ $\qquad \hat{B} \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$

$\hat{B}$ invertibile

$z = 1$ ← vogliamo lasciare punti di questo piano dentro di sé

$(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$ $\qquad (0\ 0\ 1) = (0\ 0\ 1)\hat{B}$

è come dire che

$(0\ 0\ 1)\hat{B}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$ $\qquad (0\ 0\ 1)$ è autovettore di $D_{\hat{B}}$

con autovalore $= 1$

$$(0\ 0\ 1) = (0\ 0\ 1)\hat{B}$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{B} = \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B \in Mat_{2\times 2}$

$$\det \hat{B} = \det B \cdot 1$$

$P \in Mat_{2\times 1}$

$$\begin{pmatrix} B & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX + P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

B rappresenta il cambio lineare e P una traslazione

Se vogliamo un cambio metrico:

occorre B ortogonale $(B^t B = \mathbb{1})$

(nessuna condizione su P)

$$\det(B)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det \hat{B} = \pm 1$$

$$\hat{A}' = \hat{B}^t \hat{A} \hat{B} = \begin{pmatrix} B^t & 0 \\ p^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B^t & 0 \\ p^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & Ap + b \\ b^t B & b^t p + c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B^t A B & B^t A p + B^t b \\ p^t A B + b^t B & p^t A p + p^t b + b^t p + c \end{pmatrix}$$

Ci sono degli invarianti affini

$sg\,\hat{A}$

$sg\,A$

		$sg\,\hat{A}$	$sg\,A$
x^2+y^2-1	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$2,1$	$2,0$
x^2-y^2-1	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$1,2$	$1,1$
x^2-y			
x^2+y^2+1			
x^2-y^2			
x^2+y^2			
x^2-1			
x^2+1	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$2,0$	$1,0$
x^2	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$1,0$	$1,0$

invarianti metrici

$$B^t B = \mathbb{1}$$

$$\det(\hat{B}^t \hat{A} \hat{B}) = \underbrace{\det(\hat{B})^2}_{=1} \det \hat{A}$$

gli invarianti sono:

$$A \rightsquigarrow B^t A B = B^{-1} A B$$

- $\underline{\det} \hat{A}$
- $p_A(x) \leftrightarrow \underline{tr} A$ e $\underline{\det} A$

Come si ottengono le forme descritte dal teorema?

Osserviamo che $A \rightsquigarrow B^t A B$

$B^{-1} A B$

A è simmetrica $\underset{\text{Teo. Spettrale}}{\Longrightarrow}$ A è simile a una diagonale tramite B ortonormale

$\begin{pmatrix} B & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ci consente di ottenere}} \begin{pmatrix} D & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$b \rightsquigarrow B^t A P + B^t b$$

dopo aver sistemato A in D

uso solo $B = \mathbb{1}$

$$b \rightsquigarrow AP + b$$

se esiste P t.c. $Dp + b = 0 \iff (D \mid -b)$ ha soluzione

riesco a cancellare il termine b

tale P si chiama "centro della conica" in tal caso ho la forma diagonale

$$\hat{A} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

In caso contrario $(D \mid -b)$ non ha soluzione

$\Rightarrow$ D non è invertibile

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Posso ancora scegliere bene $P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$

posso usare P_x per cancellare $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

almeno b_1 (ma non b_2)

Posso fare un'altra traslazione

$P = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ e scegliere y per cancellare c

$\rightsquigarrow$ otteniamo $\hat{A}$ è congruente $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$

Per sistemare la forma affine basta applica un cambio $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con B diagonale

$B = \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix}$ ottengo solo coeff $= \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}$.