•) Esercizi settimanali :

•) $0v = 0_V$: $$0v \overset{0=1-1}{=} (1-1)v \overset{\text{Assioma n°?}}{=} 1v - 1v \overset{\text{Assioma n°?}}{=} v - v = 0_V$$

$$-v = (-1)v$$

Viceversa: Se $tv = 0_V$ allora $\star$

o $v = 0_V$ oppure se $v \neq 0_V$ allora $t = 0$

(Legge di annullamento):

Se $v \neq 0_V$ e $\boxed{tv = 0_V}$, facciamo vedere $t = 0$:

$$v = 1v \underset{t \neq 0}{=} (t t^{-1})v = (t^{-1}t)v = t^{-1}(tv) = t^{-1}0_V = 0_V$$

contraddizione!

$$\boxed{tv = 0_V \iff t = 0 \text{ oppure } v = 0_V}$$

Ipotesi

$$\boxed{v+u = w+u}$$

Facciamo vedere che $v=w$

Sol.:

$$v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esistenza} \\ \text{di } 0_V}}{=} v+0_V \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esistenza} \\ \text{di } -u}}{=} v+(u-u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Associ.} \\ \text{di } +}}{=} (v+u)-u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{=} (w+u)-u$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{associatività}}}{=} w+(u-u) = w+0_V = w.$$

OSS: Questo è vero in qualunque gruppo.

~~Span~~ u, v, w Domande $\mathrm{Span}(w) \subseteq \mathrm{Span}(u,v)$?

Se lo è è vero che

$\mathrm{Span}(w) = \mathrm{Span}(u,v)$?

1) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Span}(w) \subseteq \mathrm{Span}(u,v)$? Se lo fosse $\exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ t.c.

$$w = t_1 u + t_2 v$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix} \qquad 1 \neq t_1 0 + t_2 0$$

$\mathrm{Span}(w) \not\subseteq \mathrm{Span}(u,v)$.

2) $u = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{Span}(w) \subset \text{Span}(u,v)$? Si perché

$$w = u + v$$

Quindi $\forall t \in \mathbb{C}$

$$tw = t(u+v) = tu + tv \in \text{Span}(u,v)$$

$\Rightarrow$ $\text{Span}(w) \subseteq \text{Span}(u,v)$.

Sono uguali? Se lo fossero u e v sarebbero multipli di w: ma u non è un multiplo di w.

$$\underset{u}{\begin{pmatrix} \textcircled{0} \\ 1 \end{pmatrix}} = t \underset{w}{\begin{pmatrix} \textcircled{1} \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow t = 0$$

$\text{Span}(w) \subsetneq \text{Span}(u,v)$.

OSS: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è un multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se $\exists\ t$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora

dalla prima si avrebbe

$$0 = t$$

e dalla seconda

$$1 = t0$$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è un multiplo di $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$?

No, perché se esistesse $t \in \mathbb{K}$ t.c.

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} \iff \begin{matrix}1 = t\\ 1 = 0\end{matrix}$$

impossibile.

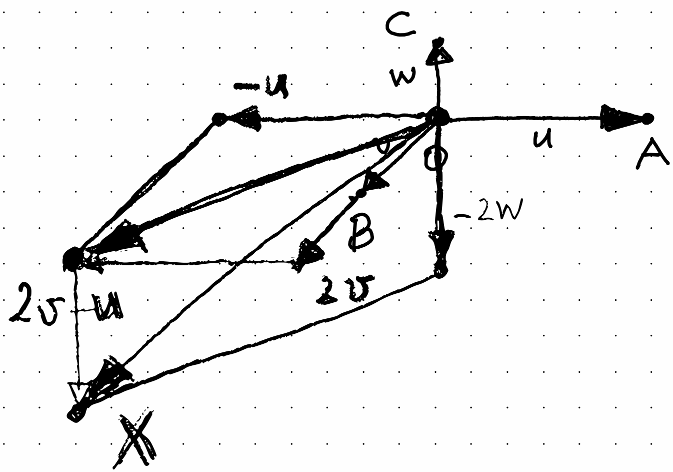
Quali sono i multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{K} \right\}$$

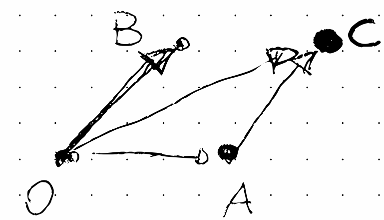
Esercizio: $u = \overrightarrow{OA}$, $v = \overrightarrow{OB}$, $w = \overrightarrow{OC}$

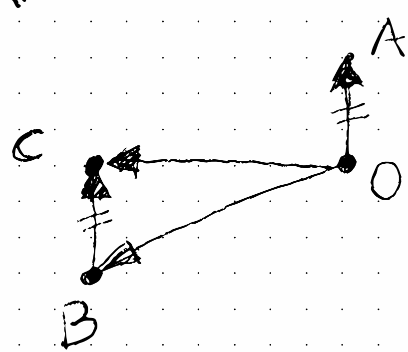
Determinare

$$X = \underbrace{2v - u}_{} - 2w$$



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$





$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

<u>Es 3</u> : $\quad 0_V$ = elemento neutro nel gruppo $(V, +)$

$$0v = 0_V \quad : \quad 0v \overset{\text{NO}}{=} 0v + 0v \;\cancel{=}$$

si

$$0v = (0+0)v = 0v + 0v$$

$$-0v$$

$$\Rightarrow \quad 0v + \overbrace{w} = (0v + 0v) + w$$

$$\Rightarrow \quad 0_V = 0v \qquad \text{bello!}$$