<u>Es 1</u> : 1. Sia $v \in V = U \oplus W$. Siano $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$ tali che $v = u_1 + w_1$, $v = u_2 + w_2$.

Allora $u_1 + w_1 = v = u_2 + w_2 \Rightarrow$

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0_V\} \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ e } w_1 = w_2.$$

2. $U = \langle 1 + x^2 + x^3 \rangle$, $W = \langle 1-x, 1+x, (x-1)^2 \rangle \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

I generatori di W sono lin. Ind.:

$$x_1(1-x) + x_2(1+x) + x_3(x-1)^2 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3.$$

$\Rightarrow x_3 = 0$. $x_1(1-x) + x_2(1+x) = 0 + 0x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 & x_1 = -x_2 \\ -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow & x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

dim $W = 3$. , Il generatore di U non appartiene a W, perché i generatori di W hanno grado ≤ 2, mentre quello di U ha grado 3. Quindi $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}[x]_{\leq 3}}\}$.

$\Rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = U \oplus W$.

$$p(x) = 1+x+x^2+x^3 = u + w = x_1(1+x^2+x^3) + w$$

ha grado 3 oppure è zero

ha grado ≤ 2.

segue che

$$\mathrm{pr}_U^W(p(x)) = x_1(1+x^2+x^3) = 1+x^2+x^3.$$

e $x_1 = 1$

$$q(x) = 1+x^3 = (1+x^2+x^3) - x^2$$

Dato che $x^2 \notin U$ e $\mathrm{pr}_U^W(x^2) = 0_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}$ perché ha grado 2, concludiamo che

$$x^2 \in W \Rightarrow \mathrm{pr}_W^U(1+x^3) = -x^2.$$

<u>Es 2</u> : 1. $L(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3) =$

$= x_1 \; L(v_1) + x_2 \; L(v_2) + x_3 \; L(v_3) =$

$= (2x_1 + x_2 + 3x_3) W_1 + (3x_1 + 6x_3) W_2 + (-x_1 - x_2 - x_3) W_3 +$

$+ (x_1 - x_2 + 3x_3) W_4 .$

2. $Ker(L) = \{ v \in V \mid L(v) = 0_W \} =$

$$= \left\{ v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 , \\ 3x_1 + \quad 6x_3 = 0 , \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 , \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 . \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 + \cancel{(x_1 + x_2 + x_3)} = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \cancel{(x_1 + 2x_3)} + (-x_2 + x_3) = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 0 , \\ -x_2 + x_3 = 0 , \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 . \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ v = \text{—} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 , \\ x_2 = x_3 . \end{array} \right\} = <$$

$$= \left\{ v = -2x_3 v_1 + x_3 v_2 + x_3 v_3 \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= < -2v_1 + v_2 + v_3 >$$

Una base di $\operatorname{Ker} L$ è $\{-2v_1 + v_2 + v_3\} = \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} L}$.

3) $\mathcal{B}_V = \{-2v_1 + v_2 + v_3 , \; v_1 , \; v_2\}$

4) $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} L} = \{ L(v_1) = 2w_1 + 3w_2 - w_3 + w_4 , \; L(v_2) = w_1 - w_3 - w_4 \}$.

5) $\mathcal{B}_W = \{ L(v_1), L(v_2), w_1, w_2 \}$.

Es3: 1. $L(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha L(v_1)+\beta L(v_2) \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, \forall v_1,v_2\in V.$

2. $\operatorname{Ker} L=\{v\in V \mid L(v)=0_W\}$. $\operatorname{Im}(L)=\{L(v) \mid v\in V\}=$
$=\{w\in W \mid \exists\, v\in V : L(v)=w\}$

. Siano $v_1,v_2\in\operatorname{Ker}L$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

$L(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha L(v_1)+\beta L(v_2)=0_W \Rightarrow \alpha v_1+\beta v_2\in\operatorname{Ker}L \Rightarrow \operatorname{Ker}L$ è un sottospazio vettoriale di V.

. Siano $w_1=L(v_1)$, $w_2=L(v_2)\in\operatorname{Im}(L)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

$\alpha w_1+\beta w_2=\alpha L(v_1)+\beta L(v_2)=L(\alpha v_1+\beta v_2)\in\operatorname{Im}L.$

$\Rightarrow \operatorname{Im}L$ è un sottospazio vettoriale di W.

3. $\dim V=\dim\operatorname{Im}L+\dim\operatorname{Ker}L\le\dim W+\dim\operatorname{Ker}L.$

Se L è iniettiva, $\dim\operatorname{Ker}L=0$ e quindi $\dim V\le\dim W$.

$\dim\operatorname{Im}L=\dim V-\dim\operatorname{Ker}L\le\dim V$

Quindi se L è suriettiva, $\dim W=\dim\operatorname{Im}L\le\dim V$.

Non vale il viceversa: basta prendere $L=0$.

4. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

L è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ $L(\mathcal{B}) = \{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ è una base di W.

$\Rightarrow$) Se L è un isomorfismo lineare.

$$x_1 L(v_1) + \dots + x_n L(v_n) = 0_W \overset{L \text{ lineare}}{\Longrightarrow} L(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = 0_W$$

$$\Rightarrow x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in \operatorname{Ker} L = \{0_V\} \underset{\substack{\mathcal{B} \text{ è} \\ \text{lin. Ind.}}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

$\Rightarrow$ $L(\mathcal{B})$ è lin. Ind..

$L(\mathcal{B})$ genera $\operatorname{Im} L = W$, perché L è suriettiva.

$\Leftarrow$) $\langle L(\mathcal{B}) \rangle = \operatorname{Im} L$ eq quindi L è suriettiva.

Sia $v \in \operatorname{Ker} L$. Allora $L(v) = 0_W$.

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ e quindi $x_1 L(v_1) + \dots + x_n L(v_n) = 0_W$

$$\underset{\substack{L(\mathcal{B}) \text{ è} \\ \text{lin. Ind.}}}{\Longrightarrow} x_1 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow \operatorname{Ker} L = \{0_V\}$$

$\Rightarrow$ L è iniettiva.

__Es4__: 1)

$$e_1 = \frac{1}{2}\left[(e_1+e_2)+(e_1-e_2)\right]$$
$$e_2 = \frac{1}{2}\left[(e_1+e_2)-(e_1-e_2)\right]$$
$$e_3 = \frac{1}{2}\left[(e_3+e_4)+(e_3-e_4)\right]$$
$$e_4 = \frac{1}{2}\left[(e_3+e_4)-(e_3-e_4)\right]$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

2) $$L(2e_1+2e_3) = A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $$L^{-1}(e_1-e_3) = \left\{ X \in \mathbb{K}^4 \;\middle|\; AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ X \in \mathbb{K}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = -2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4) $\mathcal{B} = \{e_1+e_2, e_1-e_2, e_3+e_4, e_3-e_4\}$, $L(\mathcal{B}) = \{e_2, e_1, e_3, e_4\}$.

Per il punto 4 dell' es. 3 L è un isomorfismo perché $L(\mathcal{B})$ è una base. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ES5:

.) $\mathrm{Im}\, A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Ker}\, A = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

.) $\mathrm{Im}\, B = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Ker}\, B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

.) $C^3 = i\, C^1$, C^1 e C^2 sono lin. Ind.

$\mathrm{Im}\, C = \langle C^1, C^2 \rangle$, $\mathrm{Ker}\, C = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$i \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2i \\ i-1 \end{pmatrix} = C^3$$

$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}C} = \{ C^1, C^2 \}$ $\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, C = 2$