Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 6

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 10 Novembre 2020

Esercizio 1. *Trovare la forma a scala ridotta di ognuna delle seguenti matrici e trovare le loro colonne dominanti. Verificare il risultato con MATLAB.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & -2 & -4 & 5 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -4 & -3 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -6 & 1 & -7 & 11 & 0 & 11 \\ -2 & 2 & -4 & 3 & -7 & 12 & -1 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots$$

$R_2 \longmapsto R_2 - R_1$

Esercizio 2. *1. Descrivere tutte le possibili matrici 2×2 a scala ridotte.*

2. Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ nei parametri reali a, b, c, d, trovare la sua forma a scala ridotta. (Ovviamente rref(A) dipende dalla scelta dei parametri, per cui bisogna considerare i diversi casi separatamente.)

1) $\underset{R_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}} \qquad \underset{R_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}} \qquad \underset{R_3}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}} \qquad \underset{R_4}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

2)

$a = b = c = d = 0 \iff R_1$

$ad - bc \neq 0 \iff R_4$

$\begin{cases} ad - bc = 0 \\ a \neq 0 \text{ o } c \neq 0 \end{cases} \iff R_2$

$\lambda \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} \lambda a = b \\ \lambda c = d \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda ad = bd \\ \lambda bc = bd \end{matrix} \Rightarrow ad - bc = 0$

Se $ad = bc$, $a \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{b}{a} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$.

$\begin{matrix} a = c = 0 \\ b \neq 0 \text{ o } d \neq 0 \end{matrix} \iff R_3.$

Esercizio 3. *Calcolare l'inversa delle seguenti matrici, e verificare il risultato con MATLAB:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & -i & -i \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(B \mid A) \rightsquigarrow (\mathbb{1} \mid \underbrace{B^{-1}A})$$

$$A: \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$(B \mid \mathbb{1}) \rightsquigarrow (\mathbb{1} \mid B^{-1})$$

$$(C \mid \mathbb{1}) \rightsquigarrow (\mathbb{1} \mid C^{-1})$$

Esercizio 4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Sia $f : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 + 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

1. *Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$. Denotarla con A.*
2. *Trovare una base per il nucleo di f.*
3. *Trovare una base per l'immagine di f.*
4. *Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove*

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di V.

5. *Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{C}$.* = in arrivo ed in partenza.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \langle -\frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2 + v_3 \rangle$

3. $\operatorname{Im} A = \langle A^1, A^2 \rangle \Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle v_1 + 2v_2 + v_3, \; v_1 + v_3 \rangle$

4. $F_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(C) = 3 \Rightarrow \mathcal{C}$ è una base.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{E}}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{E}}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "C"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "C"]
\end{tikzcd}$$

La matrice cercata è $C^{-1}AC$

Per calcolarla

$$(C|AC) \rightsquigarrow \left(\mathbb{1}_3 \left| \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{matrix} \right.\right)$$

$\Rightarrow$ La matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{E}$ è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. *Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Consideriamo le seguenti funzioni*

$$F : V \to \mathbb{R}^4 : F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-2) \\ p(-1) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

$$L : V \to V : L(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$$

1. *Dimostrare che F ed L sono lineari.*
2. *Trovare la base $\mathcal{B}$ tale che $F = F_{\mathcal{B}}$.*
3. *Trovare la matrice associata ad L nella base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo).*
4. *Trovare la matrice associata ad L nella base standard (sia in partenza che in arrivo).*
5. *Mostrare che L è invertibile e calcolare l' inversa della matrice del punto precedente.*

Sol. : 1) $F(\alpha p + \beta q) = \begin{pmatrix} \alpha p + \beta q\,(-2) \\ \alpha p + \beta q\,(-1) \\ \alpha p + \beta q\,(1) \\ \alpha p + \beta q\,(2) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} p(-2) \\ p(-1) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} q(-2) \\ q(-1) \\ q(1) \\ q(2) \end{pmatrix}$

$L(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)(x+1) + (\alpha p + \beta q)(x-1) = \alpha\, p(x+1) + \beta q(x+1)$
$+ \alpha\, p(x-1) + \beta q(x-1) = \alpha L(p) + \beta L(q).$

2) $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ t.c. $F(b_i) = e_i$

$b_1 = -\dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{12}$, $b_2 = \dfrac{(x+2)(x-1)(x-2)}{6}$

$b_3(x) = b_2(-x) = \dfrac{(-x+2)(-x-1)(-x-2)}{6} = -\dfrac{(x+2)(x+1)(x-2)}{6}$

$b_4(x) = b_1(-x) = \dfrac{(x-1)(x+1)(x+2)}{12}$

3. $A = \left(F(L(b_1)) \,\middle|\, F(L(b_2)) \,\middle|\, F(L(b_3)) \,\middle|\, F(L(b_4)) \right)$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} b_1(-1)+b_1(-3) & b_2(-1)+b_1(-3) & & \\ b_1(0)+b_1(-2) & b_2(0)+b_2(-2) & b_3(x)= & b_4(x)= \\ b_1(2)+b_1(0) & b_2(2)+b_2(0) & b_2(-x) & b_1(-x) \\ b_1(3)+b_1(1) & b_2(3)+b_2(1) & & \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} 10/3 & -7/3 & 5/3 & -2/3 \\ 5/6 & 2/3 & 2/3 & -1/6 \\ -1/6 & 2/3 & 2/3 & 5/6 \\ -2/3 & 5/3 & -7/3 & 10/3 \end{array} \right)$$

4. $C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \text{"}L(1)\text{"} & \text{"}L(x)\text{"} & \text{"}L(x^2)\text{"} & \text{"}L(x^3)\text{"} \\ 2 & 2x & 2+2x^2 & 6x+2x^3 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5 = C^{-1}: $\quad (C \mid \mathbb{1}_4) \rightsquigarrow \left(\mathbb{1}_4 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$

$$\underbrace{}_{\displaystyle =\, C^{-1}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(B \mid AB) \rightsquigarrow (\mathbb{1}_4 \mid C)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 10/3 & -7/3 & 5/3 & -2/3 \\ 5/6 & 2/3 & 2/3 & -1/6 \\ -1/6 & 2/3 & 2/3 & 5/6 \\ -2/3 & 5/3 & -7/3 & 10/3 \end{array}\right)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 & -28 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 10 & 28 \end{pmatrix}$$

ERRATA CORRIGE

$$(B \mid AB) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & -8 & 2 & -4 & 10 & -28 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 2 & 4 & 10 & 28 \end{array}\right)$$

$$(B \mid AB) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & -8 & 2 & -4 & 10 & -28 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 2 & 4 & 10 & 28 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & -8 & 2 & -4 & 10 & -28 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 0 & 2 & -6 & 20 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & 0 & 6 & -6 & 36 \\ 0 & 4 & 0 & 16 & 0 & 8 & 0 & 56 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 6 & 2 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 0 & 2 & -6 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 0 & 0 & 12 & -24 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & 0 & 0 & 24 & -24 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 6 & 2 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 7 & 0 & 2 & -6 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & 0 & 0 & 24 & -24 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$