Correzione esercizi

Es 1 $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es 3 $\quad A(n)_i^j = \begin{cases} 1 & i<j \\ 2 & i=j \\ 3 & i>j \end{cases}$

$$\det(A(n)) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & & 1 \\ 3 & 3 & 2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 3 & 3 & & & 2 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto R_2 - R_1}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & 1 \\ 3 & 3 & & & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{C_1 \mapsto C_1 - C_2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & & & \\ \vdots & \vdots & & A(n-2) & \\ 0 & 3 & & & \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & & & \\ \vdots & & A(n-2) & \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det A(n-2) = \cdots = \det A(n-2018)$$

$$\det A(2020) = \det A(2) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Es 4 $\quad L_1 : V_1 \to V_2 \quad L_2 : V_2 \to V_3$

1) $rk(L_2 \circ L_1) = rk(L_1)$ se L_2 iniettiva

2) $rk(L_2 \circ L_1) = rk(L_2)$ se L_1 suriettiva

3) $L_2 \circ L_1$ isom. ma L_1, L_2 no

Sol 2) $\quad rk\, L = \dim \operatorname{Im} L$

$$\operatorname{Im} L_2 \circ L_1 \subseteq \operatorname{Im} L_2$$ c'è sempre

$v \in V_3$

$v = L_2(L_1(w)) = L_2(w')$

$w \in V_1$

dove $w' = L_1(w) \in V_2$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} L_2 \circ L_1 \leq \dim \operatorname{Im} L_2$ sempre

$\operatorname{rk} L_2 L_1 \leq \operatorname{rk} L_2$

Cosa vuol dire che $\operatorname{Im} L_2 \circ L_1 = \operatorname{Im} L_2$

$\subseteq$ ✓

$\supseteq$? se $v = L_2(w') \in V_3$ $w' \in V_2$

allora devo mostrare che $\exists\, w \in V_1$ t.c.

$v = L_2(L_1(w))$

è ovviamente garantito se L_1 è suriettiva

perché basta prendere una controimm

$\supseteq$ ✓ di w' tramite L_1

$w' = L_1(w)$

1) $\underline{rk}(\underline{L_2 \circ L_1}) = \underline{rk}(L_1)$ se $\underline{L_2}$ è iniett.

Sol: non mi sogno di scrivere

$$\underset{\subseteq V_3}{\operatorname{Im} L_2 L_1} \;\cancel{=}\; \underset{\subseteq V_2}{\operatorname{Im} L_1}$$

Invece: prendo una base dell'immagine di L_1

$\operatorname{Im}(L_1) = \langle b_1, \dots, b_r \rangle \quad r = rk\, L_1$

e b_i sono lin. indip.

quindi $\langle L_2(b_1), \dots, L_2(b_r) \rangle = \operatorname{Im}(L_2 \circ L_1)$

quindi in generale $\Rightarrow rk(L_1) \geq rk\, L_2 L_1$

mi chiedo quando vale che

$L_2(b_1), \dots, L_2(b_r)$ sono lin. indip.

in tal caso sarebbero una base di $\operatorname{Im} L_2 L_1$

$$\lambda_1 L_2(b_1) + \dots + \lambda_r L_2(b_r) = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda_i = 0$$

$$L_2(\underbrace{\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r}_{v}) = 0$$

$\Rightarrow v \in \ker L_2$

<u>se L_2 è iniettiva</u> ho che $v = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

$\Rightarrow$ sono una base di $\operatorname{Im} L_2 L_1 \Rightarrow \operatorname{rk} L_1 = \operatorname{rk} L_2 L_1$

3) Esibire L_1, L_2 non isomorfismi t.c. $L_2 \circ L_1$ è isomorfismo

---

Sol: deve succedere che $\dim V_1 = \dim V_3$

"L_1, L_2 non isom." è garantita appena $\dim V_1 \neq \dim V_2$

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{L_1} & V_2 & \xrightarrow{L_2} & V_3 \\ n & & m \neq n & & n \end{array}$$

devo avere L_1 iniet., L_2 surriett.

$n \leq m$

$m \geq n$

$n = 1 \qquad m = 2$

$$\mathbb{K} \xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}} \mathbb{K}$$

$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$ è isom.

Es 5 $\quad V = \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$

$$W = \langle 1, \cos(x), \sin(x), \cos^2(x), \sin^2(x), \cos(x)\sin(x), \cos(2x), \sin(2x) \rangle \subseteq V$$

$$F : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$F(f) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

devo scegliere $x_1, \dots, x_n \in [0, 2\pi]$

$$G : \mathbb{R}^8 \longrightarrow W$$

$G(e_1) = 1$

$G(e_2) = \cos(x)$

$G(e_3) = \sin(x)$

$G(e_4) = \cos^2(x)$

$G(e_5) = \sin^2(x)$

$G(e_6) = \cos(x)\sin(x)$

$G(e_7) = \cos(2x)$

$G(e_8) = \sin(2x)$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = \pi$$
$$x_3 = \frac{\pi}{2}$$
$$x_4 = \frac{3}{2}\pi$$
$$x_5 = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es 5 1) 3 rel di dip. lin.

com'è fatto $v \in W$

$v = \lambda_1 1 + \lambda_2 \cos(x) + \ldots$

$1 - \cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$ è una rel. di dip. lin.

$\cos(2x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) = 0$ "

$\sin(2x) - 2\cos(x)\sin(x) = 0$ "

---

2) F è lineare

F è la valutazione in molti punti

3) Per scegliere i punti voglio:

- i generatori di W devono essere "diversi" in questi punti
- deve essere facile calcolare F

$$
\begin{array}{l c}
 & \begin{array}{cccccccc} 1 & \cos & \sin & \cos^2 & \sin^2 & \cos\sin & \cos 2x & \sin 2x \end{array} \\
\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \pi \\ x_3 = \frac{\pi}{2} \\ x_4 = \frac{3}{2}\pi \\ x_5 = \frac{\pi}{4} \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

4) Calcolo il det. di:

$$A^{(d)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A(d)) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \neq 0$$

quindi non esistono rel. di dip. lineare

fra A^1, A^2, A^3, A^4, A^6

quindi " " "

fra $1, \cos(x), \sin(x), \cos^2(x), \cos(x)\sin(x)$

$\Rightarrow$ sono indipendenti

sono generatori di W perché avevamo già trovato 3 rel. di dip. lin. che coinvolgevano

$\sin^2(x), \cos(2x), \sin(2x)$