# Correzione Esercizi

Es 1 Calcolare aree

1. $\text{Area}(p_1 p_2 p_3) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\underset{\underset{c_1}{\shortparallel}}{p_2 - p_1} \,\middle|\, \underset{\underset{c_2}{\shortparallel}}{p_3 - p_1}\right)\right|$

2. $\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{p_2+p_3}{2}, \frac{p_3+p_1}{2}$

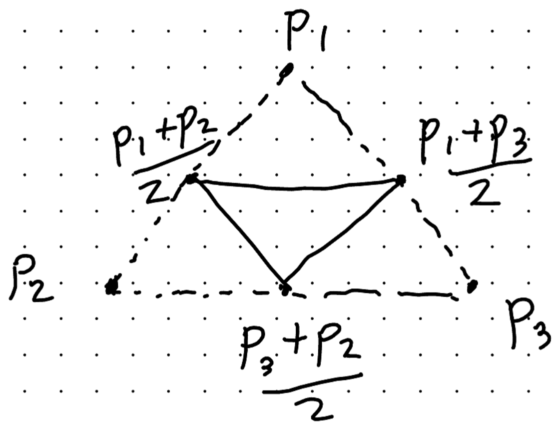
$$A_2 = \left|\frac{1}{2}\det\underbrace{\left(\frac{p_1-p_3}{2} \,\middle|\, \frac{p_1-p_2}{2}\right)}_{M_2}\right|$$

$$M_2 = (c_1|c_2)\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

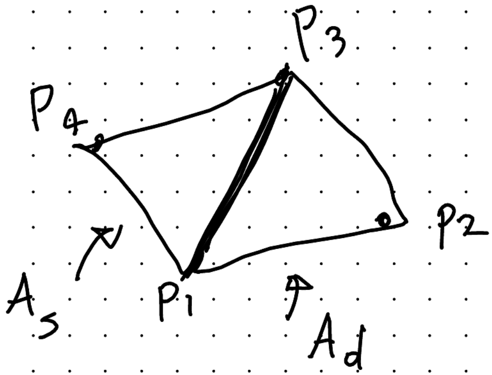
$$M_2 = (c_1 | c_2)\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_2) = \det(c_1 | c_2)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow |\text{area}_2 = \frac{1}{4}\,\text{area}_1$$

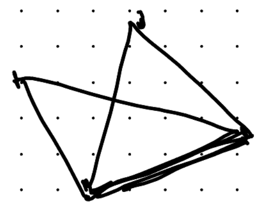


# 3. Area di un quadrilatero




sì: $P_1 P_2 P_3$ e $P_3 P_4 P_1$

NO: $P_1 P_2 P_3$ e $P_4 P_1 P_2$



$$A_{tot} = A_s + A_d$$

- le aree sono $\geq 0$

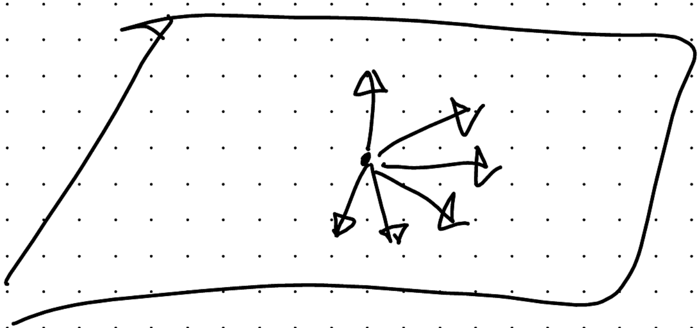
- dividere bene il quadrilatero

# Es 2

1. $p_1(x), \dots, p_6(x)$ sono indip. $\iff \lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i, j$

$\Rightarrow$ è ovvia perché se $\lambda_i = \lambda_j$ allora $p_i(x) = p_j(x)$

$\Leftarrow$ è molto meno ovvia



$\mathbb{K}^2$

Scriviamo una matrice $A$

per ogni colonna $A^j$ scrivo i coeff di $p_j(x)$

$\mathcal{C} = (1, x, \dots, x^5)$

$$p_1(x) = (x+\lambda_1)^5 = x^5 + 5\lambda_1 x^4 + 10\lambda_1^2 x^3 + 10\lambda_1^3 x^2 + 5\lambda_1^4 x + \lambda_1^5$$

$F_{\mathcal{C}} : V \to \mathbb{K}^6$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1^5 & & \lambda_6^5 \\ 5\lambda_1^4 & & 5\lambda_6^4 \\ 10\lambda_1^3 & \cdots & \vdots \\ 10\lambda_1^2 & & \vdots \\ 5\lambda_1 & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$p_i(x)$ sono in $V$ indip. $\Leftrightarrow$ $F_{\mathcal{C}}(p_i(x))$ sono indip. in $\mathbb{K}^6$

$\iff$ le colonne di $A$ sono indip.

$$\left( A : \ A^j = F_{\mathcal{E}}(p_j(x)) \right)$$

$\iff$ $A$ ha rango $6$

$\iff$ $\det A \neq 0$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \lambda_1^5 & \cdots & \lambda_6^5 \\ 5\lambda_1^4 & \cdots & 5\lambda_6^4 \\ 10\lambda_1^3 & \cdots & 10\lambda_6^3 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_1^5 & \cdots & \lambda_6^5 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (5 \cdot 10)^2 \cdot (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & & \cdots & \lambda_6 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^4 & & \cdots & \lambda_6^4 \\ \lambda_1^5 & & \cdots & \lambda_6^5 \end{pmatrix}$$

$$= (5 \cdot 10)^2 (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \lambda_1^5 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & \lambda_6^5 \end{pmatrix}$$

$$= -(5 \cdot 10)^2 \det V(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$$

$$\neq 0 \quad \Longleftrightarrow \det V(\lambda_1, \dots, \lambda_6) \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall\, i \neq j$$

Oss. $\dim V = 6$

$(x+\lambda_1)^5, \dots, (x+\lambda_6)^5, (x+\lambda_7)^5$ sono dip. sempre

$(\lambda_1 x)^5, (\lambda_2 x)^5, (\lambda_3 x)^5$ sono lin. dip.

2. $S = \{\cos(x), \cos(2x), \cos(3x)\} \subseteq V = \mathbb{R}^{[-1,1]}$

sono indip? (sì)

Vogliamo
$F$ lineare : $\langle S \rangle \to \mathbb{R}^n$

$n = 3$

$\cos(kx)\big|_{x=0}$ $\quad 1$

$-k\sin(kx)\big|_{x=0}$ $\quad 0$

$-k^2\cos(kx)\big|_{x=0}$ $\quad -k^2$

$\vdots$

$k^4\cos(kx)\big|_{x=0}$ $\quad k^4$

$$F(v) = \begin{pmatrix} v(0) \\ v''(0) \\ v''''(0) \end{pmatrix}$$

$F$ è <u>lineare</u>

In questo caso ottengo la matrice

$$A = \left( F(\cos x) \,\middle|\, F(\cos 2x) \,\middle|\, F(\cos 3x) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -9 \\ 1 & 16 & 81 \end{pmatrix}$$

$$= V(-1, -4, -9)^t$$

$$\det A = \det(V(-1,-4,-9)) \neq 0$$

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rk} A = 3$ $\Longleftrightarrow$ non ci sono rel. di dip. lin. fra le colonne di $A$

Se ci fosse lin dip fra $\cos x, \cos 2x, \cos 3x$

$\lambda \cos x + \mu \cos 2x + \nu \cos 3x = 0$ e $\lambda, \mu, \nu$ non tutti nulli

applico $F$

$F(\lambda \cos x + \mu \cos 2x + \nu \cos 3x) = F(0)$

linearità

$\lambda F(\cos x) + \mu F(\cos 2x) + \nu F(\cos 3x) = 0$

le 3 colonne di $A$ sono lin. dip.

In generale

$$F : \langle S \rangle \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$F(v) = \begin{pmatrix} v(0) \\ v''(0) \\ \vdots \\ v^{(2(n-1))}(0) \end{pmatrix}$$ F è lineare

costruisco $A$ t.c. $A^j = F(\cos(jx))$

e osservo che $\det A = \det V(-1, -4, \dots, -n^2) \neq 0$

$\Rightarrow$ le colonne di $A$ sono indip. $\Longrightarrow$ $S$ è indip.

Per l'ultima domanda:

$V$ non è fin. gen.

perché altrimenti posso scegliere finiti generatori

$g_1, \dots, g_h$ e però $\cos(x), \dots, \cos((h+1)x)$

sono $h+1$ vettori lin indip.

e ciò viola il Teorema fondamentale sull'indip. lineare

$$|I| \leq |G|$$

Es 3)

Teo degli orlati:

- $rk A \geq 1 \quad \forall k$
- $rk A \geq 2 \quad -k, -k^2, (k-1)k^2, (k-1)k$

  $\forall k \neq 0$

- $rk A \geq 3 \quad k^2 (k-1)^2 (k+1)$

  $\forall k \notin \{0, 1, -1\}$

---

$rk A = 1 \iff k = 0$

$rk A = 2 \iff k = \pm 1$

$rk A = 3$ altrimenti

Es 47

Si poteva procedere così:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 3 | -1 | 1 |

traslo indietro di 9

e interpolo

| | | |
|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 |
| 3 | -1 | 1 |

$\to 3x^2 - x - 1$

e poi traslo in avanti: $3(x-9)^2 - (x-9) - 1$

$$3x^2 - 55x + 251$$

Es 5)

5. è il più facile

$U_3 \cap U_4$ e l'intersezione in forma cartesiana è immediata

$U_3 = \ker B_3$

$U_4 = \ker B_4$

$$U_3 \cap U_4 = \ker B_3 \cap \ker B_4 = \ker \begin{pmatrix} B_3 \\ \hline B_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_3 \\ \hline B_4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} B_3 v \\ \hline B_4 v \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$D_A$

$v \in \ker D_A \iff \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

base $\ker D_A$

$= \left( \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \right)$

traspongo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{2}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 + x_3 = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$