Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema in tre variabili dipendente dal parametro k:*

$$\begin{aligned} kx_2 + k^2x_3 &= 1 \\ x_1 + (k-1)^2x_2 + (k-1)x_3 &= 0 \\ (-k-1)x_1 + (k-1)x_2 + (1-k)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Trovare i valori del parametro k per i quali il sistema è non-singolare e, per tali valori, calcolare l'unica soluzione utilizzando la formula di Cramer.

Sol.:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & k & k^2 \\ 1 & (k-1)^2 & k-1 \\ -(k+1) & k-1 & -(k-1) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & k & k^2 \\ 1 & (k-1)^2 & k-1 \\ 0 & k^2(k-1) & k(k-1) \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} k & k^2 \\ k^2(k-1) & k(k-1) \end{pmatrix}$$

$$= -k^2(k-1)\det\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} = -k^2(k-1)(1-k^2)$$

$$= -k^2(k-1)(1-k)(1+k) = k^2(k-1)^2(k+1).$$

Il sistema è non-singolare $\iff$ $k \neq 0, 1, -1$.

In questo caso l'unica soluzione è:

$$\frac{1}{\det(A_k)}\begin{pmatrix} \det A^1(b) \\ \det A^2(b) \\ \det A^3(b) \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2(k-1)^2(k+1)}\begin{pmatrix} k(k-1)(2-k^2) \\ k \\ k(k^2-k-1) \end{pmatrix}$$

$$k(k-1)^2(k+1) = k(k^2-1)(k-1)$$
$$= k(k^3-k^2-k+1)$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{k^2-2}{k(k-1)(k+1)} \\ \\ \dfrac{1}{k(k^3-k^2-k+1} \\ \\ \dfrac{k^2-k+1}{k^4-k^3-k^2+k} \end{pmatrix}$$

$$\det A^1(b) = \det \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & (k-1)^2 & k-1 \\ 1 & k-1 & -(k-1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & (k-1)^2 & k-1 \\ 0 & -1 & -k+1-k^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (k-1) \det \begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ -1 & -k+1-k^2 \end{pmatrix} = (k-1) \det \begin{pmatrix} k & 1 \\ -k^2-k & -k+1-k^2 \end{pmatrix}$$

$$= k\,(k-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-k & -k+1-k^2 \end{pmatrix} = k\,(k-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2-2 & -k+1-k^2 \end{pmatrix}$$

$$= k\,(k-1)\,(2-k^2)$$

$$\det A^2(b) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & k^2 \\ 1 & 0 & k-1 \\ -k-1 & 1 & -k+1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k^2 & 1 & k^2 \\ k & 0 & k-1 \\ -2k & 1 & -k+1 \end{pmatrix}$$

$$= k \det \begin{pmatrix} k & 1 & k^2 \\ 1 & 0 & k-1 \\ -2 & 1 & 1-k \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} k & 1 & k^2 \\ 1 & 0 & k-1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= k \det \begin{pmatrix} k+1 & 1 & k^2 \\ 1 & 0 & k-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -k \det \begin{pmatrix} k+1 & k^2 \\ 1 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$= -k\,(k^2-1-k^2) = k$$

$$\det A^3(b) = \det \begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & (k-1)^2 & 0 \\ -k-1 & k-1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & (k-1)^2 & 0 \\ -k-1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= + \det \begin{pmatrix} 1 & (k-1)^2 \\ -k-1 & -1 \end{pmatrix} = -1 + (k+1)(k-1)^2$$

$$= -1 + (k^2-1)(k-1)$$

$$= -1 + k^3 - k^2 - k + 1 = k\,(k^2-k-1)$$

Esercizio 2. • *Trovare la forma parametrica e cartesiana dei seguenti sottospazi affini di* $\mathbb{R}^3$

1. π_1: *il piano passante per i tre punti* $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (-2,3,4)^t$ *e* $P_3 = (2,2,3)^t$;
2. π_2: *il piano passante per i tre punti* $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (-2,3,4)^t$ *e* $P_4 = (1,0,1)^t$;
3. r: *la retta parallela al piano* π_1 *ed al piano* π_2 *e passante per il punto* $Q = (1,0,0)^t$.

• *Dimostrare che le due rette*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle; \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

sono sghembe e trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per r_2 *e parallelo ad* r_1.

Sol.: •) $\pi_1 = P_1 + \langle P_2 - P_1, P_3 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9/5 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 9/5 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$$

$\Rightarrow \pi_1 : x + 9y - 5z = 5$

$\pi_2 = P_1 + \langle P_2 - P_1, \cancel{P_3}P_4 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$\Rightarrow \pi_2 : x + z = 2$

$r : \begin{cases} x + 9y - 5z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad r = Q + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

•) $r_1 = X_0 + \langle v \rangle$, $r_2 : AX = b$. $\quad \left.\begin{array}{l} \mathrm{rg}(Av) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 1 \\ \mathrm{rg}(Av \mid b - AX_0) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} -3 & 0 \\ 3 & 10 \end{array}\right) = 2 \end{array}\right\}$ r_1 ed r_2 sono sghembe.

$b - AX_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\pi : \alpha(2x + y - z - 2) + \beta(x + y + 3z - 3) = 0$

$(2\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta)y + (-\alpha + 3\beta)z = 2\alpha + 3\beta$

$(2\alpha + \beta)2 + (\alpha + \beta)(-1) + (-\alpha + 3\beta)3 = 0 \iff 4\alpha - \alpha - 3\alpha + 2\beta - \beta + 9\beta = 0$

$\Rightarrow \beta = 0, \ \alpha = 1$

$\Rightarrow \pi : 2x + y - z = 2$

Esercizio 3. *Studiare la posizione reciproca delle seguenti coppie di sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ (senza cambiare la loro forma):*

1. $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$, $\pi_2 : 2x + 3y + z = 1$;

2. $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$, $\pi_2 : 2x + 3y - z = -1$;

3. $r_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$; $r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$.

Sol.: 1. $\pi_1 = X_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$; $\pi_2 : AX = b$. ; $A = (2,3,1)$ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}(Av_1 | Av_2) = \mathrm{rg}(4, 7) = 1$; $b - AX_0 = 1 - 7 = -6$

$\pi_1 \cap \pi_2 =$ retta $r = Y_0 + \langle v \rangle$ $v = -7v_1 + 4v_2 = -7\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$

$Y_0 = X_0 - \frac{6}{4} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7/2 \\ -11/2 \end{pmatrix}$

$r = \begin{pmatrix} -2 \\ 7/2 \\ -11/2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -10 \\ 11 \\ -17 \end{pmatrix} \rangle$

2. $2 - 3 - 3 = -4 \neq 0$ $\quad -1 - (2+3+1) = -1 - 6 = -7$

$-4t = -7 \iff t = \frac{7}{4}$.

$r \cap \pi_2 = \{P_0\}$ $\quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{7}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 \\ -3/4 \\ 17/4 \end{pmatrix}$

$\frac{22}{4} - \frac{9}{4} - \frac{17}{4} = -1$ ✓

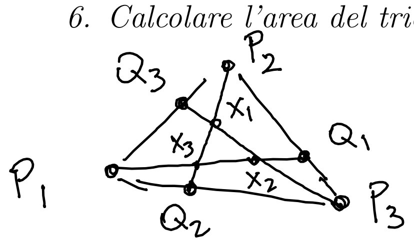
3. $Av = \begin{pmatrix} 2-1-3 \\ 1-1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad b - AX_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$t\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ NO $\Rightarrow$ r_1 ed r_2 sono sghembe.

Esercizio 4. *Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ 3 punti non allineati tali che l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ sia 1.*

1. *Determinare la forma parametrica delle rette contenenti i lati del triangolo $P_1P_2P_3$.*
2. *Calcolare le coordinate dei punti Q_1 sul lato P_2P_3 in modo che il vettore $P_2 - Q_1$ sia il doppio del vettore $Q_1 - P_3$, Q_2 sul lato P_3P_1 in modo che $P_3 - Q_2$ sia il doppio del vettore $Q_2 - P_1$ e Q_3 definito similmente.*
3. *Calcolare l'area del triangolo $Q_1Q_2Q_3$.*
4. *Determinare la forma parametrica delle rette r_1 per P_1 e Q_1, r_2 per P_2 e Q_2 e r_3 per P_3 e Q_3.*
5. *Calcolare le coordinate dei punti $X_1 = r_2 \cap r_3$, $X_2 = r_3 \cap r_1$, $X_3 = r_1 \cap r_2$.*
6. *Calcolare l'area del triangolo $X_1X_2X_3$.*

Sol.:



$$\frac{1}{2}\left|\det\left(P_2-P_1 \mid P_3-P_1\right)\right| = 1$$

1. $P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle$, $P_1 + \langle P_3 - P_1 \rangle$, $P_2 + \langle P_3 - P_2 \rangle$

2. $Q_1 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3$, $Q_2 = \frac{2}{3}P_3 + \frac{1}{3}P_1$, $Q_3 = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2$.

3. $\text{Area}(\widehat{Q_1Q_2Q_3}) = \frac{1}{2}\left|\det(Q_2 - Q_1 \mid Q_3 - Q_1)\right| = \frac{1}{18}\left|\det(-2(P_2-P_1)\right.$

$= \frac{1}{18}\left|\det\left(-2(P_2-P_1)+(P_3-P_1) \mid -(P_2-P_1)-(P_3-P_1)\right)\right| \underset{\text{Binet}}{=} \frac{1}{18}\left|\det(P_2-P_1 \mid P_3-P_1)\det\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right|$

$= \frac{1}{9}\left|\det\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}$

4. $r_1 = P_1 + \langle Q_1 - P_1 \rangle$, $r_2 = P_2 + \langle Q_2 - P_2 \rangle$, $r_3 = P_3 + \langle Q_3 - P_3 \rangle$

5. $X_1 = \frac{2}{7}P_1 + \frac{1}{7}P_2 + \frac{4}{7}P_3$, $X_2 = \frac{2}{7}P_2 + \frac{1}{7}P_3 + \frac{4}{7}P_1$, $X_3 = \frac{2}{7}P_3 + \frac{1}{7}P_1 + \frac{4}{7}P_2$

6. $\text{Area}(\widehat{X_1X_2X_3}) = \frac{1}{2}\left|\det(X_2 - X_1 \mid X_3 - X_1)\right| =$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{49}\left|\det\left((P_2-P_1)-3(P_3-P_1) \mid 3(P_2-P_1)-2(P_3-P_1)\right)\right| \overset{\text{Binet}}{=}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{49}\left|\det(P_2-P_1 \mid P_3-P_1)\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{49}\left|\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{7}$

Esercizio 5. *Si considerino i seguenti 8 punti di* $\mathbb{R}^2$*:*

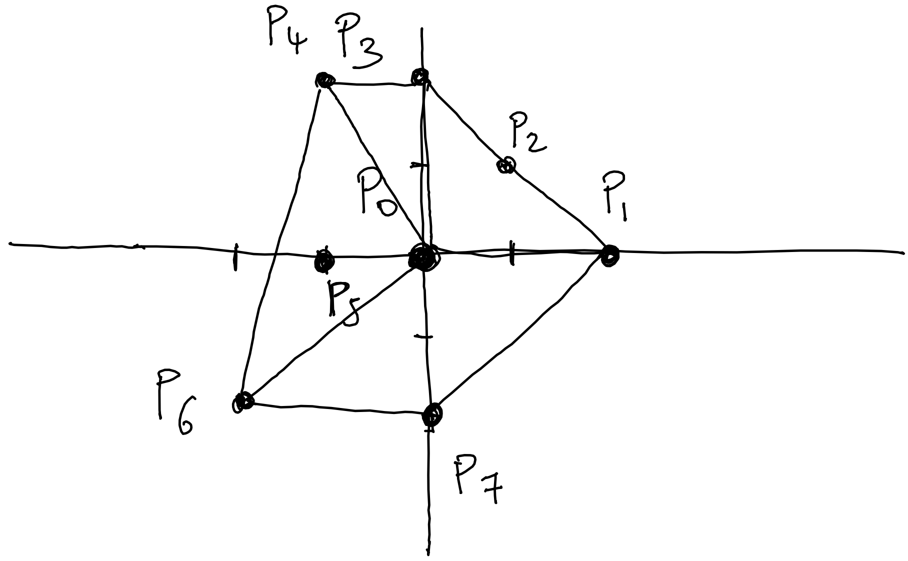
$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. *Fare un disegno che rappresenti il loro inviluppo convesso e calcolarne l'area.*

2. *Descrivere l'inviluppo affine di* P_1 *e* P_2*, l'inviluppo affine di* P_0 *e* P_1 *e l'inviluppo affine di* P_2*,* P_3 *e* P_4*.*

Sol.:



1. $\text{Area}(\text{Conv}(P_0, \ldots, P_7)) = \text{Area}(\text{Conv}(P_1, P_3, P_4, P_6, P_7)) =$

$= \frac{1}{2}\Big[|\det(P_1|P_3)| + |\det(P_3|P_4)| + |\det(P_4|P_6)| + |\det(P_6|P_7)| + |\det(P_7|P_1)|\Big]$

$= \frac{1}{2}[4+2+6+4+4] = 10$

2. $\text{Aff}(P_1, P_2) = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle : \; x+y=2$

$\text{Aff}(P_0, P_1) = \langle P_1 \rangle : \; y = 0$

$\text{Aff}(P_2, P_3, P_4) = P_2 + \langle P_3 - P_2, P_4 - P_2 \rangle = P_2 + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2 : \; 0x + 0y = 0$

Esercizio 6. *Siano r e π una retta ed un piano di $\mathbb{R}^3$, rispettivamente.*

1. *Supponiamo che $r = X_0 + \langle v \rangle$ e $\pi : ax + by + cz = d$. Sia $A_\pi = (a, b, c)$. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione P_0 nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$A_\pi v$	$rg(A_\pi v \mid d - A_\pi X_0)$
$r \subset \pi$	0	0
$r \| \pi$	0	1
$r \cap \pi = \{P_0\}$ $t_0 = (Av)^{-1}(d - AX_0)$ $P_0 = X_0 + t_0 v$	1	1

2. *Supponiamo che $r = X_0 + \langle v \rangle$ e $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione P_0 nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det(v \mid w_1 \mid w_2)$	$rg(v \mid w_1 \mid w_2 \mid X_0 - Y_0)$
$r \subset \pi$	0	2
$r \| \pi$	0	3
$r \cap \pi = \{P_0\}$ $\begin{pmatrix} t \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = (v w_1 w_2)^{-1}(Y_0 - X_0)$ $P_0 = X_0 + t v$	$\neq 0$	3

3. *Supponiamo che* $r : \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ *e* $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$. *Poniamo* $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det(A_r(w_1\|w_2))$	$rg(A_r(w_1\|w_2)\|\mathbf{b} - A_rY_0)$
$r \subset \pi$	0	1
$r\|\|\pi$	0	2
$r \cap \pi = \{P_0\}$ $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = (AW_1\|AW_2)^{-1}(b - AY_0)$ $\Rightarrow P_0 = Y_0 + s_1W_1 + s_2W_2$	$\neq 0$	2

4. *Supponiamo che* $r : \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ *e* $\pi : ax+by+cz=d$. *Siano* $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$ *e* $A_\pi = (a,b,c)$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det \begin{pmatrix} A_r \\ \hline A_\pi \end{pmatrix}$	$rg \left(\begin{array}{c\|c} A_r & \mathbf{b} \\ \hline A_\pi & d \end{array}\right)$
$r \subset \pi$	0	2
$r \| \| \pi$	0	3
$r \cap \pi = \{P_0\}$ $P_0 = \begin{pmatrix} A_r \\ \hline A_\pi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_r \\ \hline b_\pi \end{pmatrix}$	$\neq 0$	3