Correzione esercizi

Es 1

b forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$

$$(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)-2(x_1+x_3)(y_1+y_3)$$

1. Scrivere la matrice che rappresenta b in base canonica

è B t.c. $\quad b(v_1, v_2) = v_1^t B v_2$

$$B_i^j = e_i^t B e_j = b(e_i, e_j)$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Cambio di base con

$$\mathcal{B} = \left(\underset{b_1}{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right)$$ (è una base)

la nuova B' $\quad x^t (B') y = b(\tilde{x}, \tilde{y})$

vettori scritti nella base $\mathcal{B}$

$$= b(Cx, Cy)$$

$$= (Cx)^t B (Cy)$$

$$= x^t \underbrace{C^t B C}\, y$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

si poteva fare così:

$$(B')_i^j = b(b_i, b_j)$$

$$B' = C^t B C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -16 & -8 & -12 \\ -8 & -4 & -6 \\ -12 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

se B è simmetrica, anche B' lo è

$$(C^t B C)^t = C^t \cdot B^t \cdot (C^t)^t = C^t B^t C$$
$$= C^t B C$$

3. Calcolare la segnatura

Cerco di trovare una base ortogonale

- cerco una base del nucleo di b

nucleo B

- fisso un supplementare del nucleo

- applico Gram-Schmidt (facendo attenzione a vettori isotropi)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ker B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

scelgo ora e_2, e_3

cambio base in $C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(C')^t B C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ora mi sono ristretto a $\langle e_2, e_3 \rangle$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ortogonalizzo con G-S

$$e_2 \quad , \quad e_3 - \lambda e_2 = e_3 - \frac{b(e_3, e_2)}{b(e_2, e_2)} e_2$$

$$= e_3 - e_2$$

$$(-1 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C'')^t B C'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

quindi: C'' è base ortogonale perchè è diagonale

$$sg(b) = (1, 1)$$

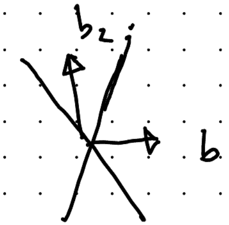
4. Una base di Sylvester:

$$C''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad (C''')^t B C''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Trovare i vettori isotropi

$$\boxed{b(v,v)=0}$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



$$0 = b(v,v) = (x_1+x_2+x_3)^2 - \sqrt{2}^2(x_1+x_3)^2$$

$$0 = \left(x_1+x_2+x_3 - \sqrt{2}(x_1+x_3)\right)\left(x_1+x_2+x_3+\sqrt{2}(x_1+x_3)\right)$$

$$\left(1-\sqrt{2},\ 1,\ 1-\sqrt{2} \;\middle|\; 0\right) \qquad \left(1+\sqrt{2} \quad 1 \quad 1+\sqrt{2} \;\middle|\; 0\right)$$

Es 2 calcolare la segnatura

A , B, C, D

metodo suggerito
- trovo il nucleo
- mi restringo ad un complementare
- ortogonalizzo una base nel complementare

Le risposte sono

A 2, 0

B 2, 1

C 1, 1 congruenti

D 2, 1

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B \neq 0$ no nucleo

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \\ \hline 0 & & 1 \end{array}\right)$$ quindi: $\langle e_1, e_2 \rangle \perp e_3$

quindi devo solo ortogonaliz. e_1, e_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_1^t B e_1 = 0 \qquad e_1, e_2 \text{ sono isotropi}$$

non posso iniziare subito con G-S

(gli isotropi sono $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$: $4xy = 0$)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$e_1+e_2 \qquad e_2$

G-S :

$$\underbrace{e_1+e_2}_{b_1}, \quad b_2 = e_2 - \lambda b_1$$

$$e_2 - \frac{b(e_2,b_1)}{b(b_1,b_1)} b_1$$

$$= e_2 - \frac{2}{4} b_1$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\1 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = C_B \qquad = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$$

in $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$C_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_D^t \, D \, C_D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_B^t \, B \, C_B = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C_B')^t \, B \, C_B' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

B, D sono congruent:

e il cambio di base

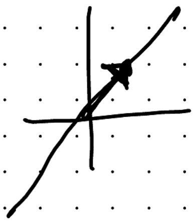
$$D = (\underbrace{C_B' C_D^{-1}})^t \, B \, (C_B' C_D^{-1})$$

il cambio di base

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es 3

1. 1, 0 param: $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$



cartes $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Es 4

1. $\pm \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ direttore $\pm \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

Es 5

$$\mathcal{B}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$