Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 11

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedì 15 Dicembre 2020

Esercizio 1. *Sia* $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e sia* $r : x - y = -2$.

1. *Trovare le equazioni parametriche e cartesiane delle due rette* r_1 *ed* r_2 *passanti per* P *e che formano un angolo di* $\pi/4$ *con la retta* r.
2. *Trovare i punti di intersezione* $Q_1 = r \cap r_1$ *e* $Q_2 = r \cap r_2$.
3. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* P, Q_1 *e* Q_2.
4. *Calcolare il perimetro del triangolo di vertici* P, Q_1 *e* Q_2.

Esercizio 2. *1. Calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli* $v_1 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $v_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $v_3 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Stabilire se (v_1, v_2, v_3) *è una base equiversa o contraversa di* $\mathcal{V}_O^3$.

2. Dimostrare che le due rette

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle, \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

sono sghembe. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per r_2 *e parallelo ad* r_1. *Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.

Esercizio 3. *1. Per oguna delle seguenti coppie di vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$1)\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 2)\ v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$3)\ v = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 4)\ v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $v \wedge w$, $||v \wedge w||$ *e* $\cos(\hat{vw})$.

2. Per oguna delle seguenti triple di vettori di $\mathbb{R}^3$

$$1)\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 2)\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$3)\ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 4)\ u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

calcolare il prodotto misto $u \cdot (v \wedge w)$.

3. Siano $v, w \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. *Dimostrare che* $||pr_v(w)|| = \frac{|v \cdot w|}{||v||}$.

Esercizio 4. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane*

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

1. *Determinare una base e la dimensione di U.*
2. *Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su U.*
3. *Calcolare la proiezione ortogonale su U di $Q = 12(1, -1, 1, -1)^t$.*
4. *Calcolare la distanza di $Q = 12(1, -1, 1, -1)^t$ da U.*

Esercizio 5.

- *Dimostrare che il baricentro del triangolo* $v_1\overset{\triangle}{v_2}v_3$ *è uguale a* $\frac{1}{3}(v_1+v_2+v_3)$. *[Ricordiamo che il baricentro è l'intersezione delle rette che contengono un vertice ed il punto medio del lato opposto]*

- *Consideriamo il punto* $P_1 = (6,4)^t$, *la retta* $r : 2x + y = 1$ *ed il punto* $P_2 = (6, -11) \in r$.

  1. *Trovare il punto* P_3 *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_1 *attraverso la retta* r.
  2. *Trovare i punti* Q_1 *(rispettivamente* Q_2 *e* Q_3*) ottenuto ruotando il punto* P_3 *(rispettivamente* P_1 *e* P_2*) attorno al punto* P_2 *(rispettivamente* P_3 *e* P_1*) di* $60°$ *in senso anti-orario.*
  3. *Calcolare il baricentro* C_1 *(rispettivamente* C_2 *e* C_3*) del triangolo* $Q_1\overset{\triangle}{P_2}P_3$ *(rispettivamente* $Q_2\overset{\triangle}{P_3}P_1$ *e* $Q_3\overset{\triangle}{P_1}P_2$*).*
  4. *Dimostrare che il triangolo di vertici* C_1, C_2 *e* C_3 *è equilatero.*