Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria Civile
Appello di luglio 2022
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli, Marco Trevisiol

27 giugno 2022

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane dell'asse del segmento* $\overline{P_1P_2}$.
2. *(2 punti) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *che ha il segmento* $\overline{P_1P_2}$ *come diametro.*
3. *(1 punto) Sia* C *il centro della circonferenza* $\mathcal{C}$. *Sia* $Q_\theta = C + rP_\theta$, *dove* $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)^t$, *un punto di* $\mathcal{C}$. *Disegnare* $Q_{\pi/3}$, $Q_{2\pi/3}$ *e* $Q_{4\pi/3}$.
4. *(1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo convesso* α *formato dal segmento* $\overline{CP_2}$ *e dal segmento* $\overline{CQ_{2\pi/3}}$.
5. *(1 punto)Trovare due punti distinti* Q_1 *e* Q_2 *tali che il quadrilatero* $P_1Q_2P_2Q_1$ *sia un quadrato ed abbia* $\overline{P_1P_2}$ *come diagonale.*

Fare un disegno (possibilmente usando riga e compasso) che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *si considerino le due rette:*

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad ed \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca di* r *ed* s*, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche per* r*.*
3. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane per* s*.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r *ed* s*.*
5. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_{s_0} *di proiezione ortogonale sul sottospazio di giacitura* s_0 *di* s*.*
6. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto* $Q = (7, 7, 7)^t$ *da* s*.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare* A^2.
2. *(1 punto) Trovare un autovettore per* A *di autovalore* 0.
3. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di* A.
4. *(2 punti) Stabilire se* A *è ortogonalmente diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$ *e nel caso lo sia trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^t AB = D$.
5. *(1 punto) Trovare una matrice non-nulla* C *tale che* $A^{1000}C = 0_4$.

Esercizio 4. *Siano* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *e* $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$. *Consideriamo la funzione* $F : V \to W$ *data da*

$$F(p(x)) = p(x^2 + 1) - p(x - 1).$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* F *è lineare.*
2. *(1 punto) Calcolare* $F(x^2 + x + 1)$.
3. *(2 punti) Scrivere la matrice associata ad* F *nelle basi standard.*
4. *(3 punti) Calcolare basi di nucleo ed immagine di* F.

Esercizio 5. *Si consideri la seguente funzione bilineare in tre variabili reali*

$$b(X, Y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

1. *(2 punti) Scrivere la matrice A associata a b nella base standard di $\mathbb{R}^3$.*
2. *(2 punti) Trovare una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, b)$.*
3. *(1 punto) Calcolare la segnatura di b.*
4. *(1 punto) Trovare una base di Sylvester associata a b.*
5. *(1 punto) Siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ i tre autovalori della matrice A trovata al punto* 1. *Stabilire se $\lambda_1\lambda_3 \geq 0$.*